TD 05 – Chernoff's Inequality and Midterm Preparation

Exercice 1. *Probabilités conditionnelles*

Soit Y une variable aléatoire prenant des valeurs entières, positives ou nulles, et dont l'espérance est strictement positive. Le but de cet exercice est de prouver la relation suivante:

$$\frac{\mathbf{E}[Y]^2}{\mathbf{E}[Y^2]} \leq \mathbf{P}\{Y \neq 0\} \leq \mathbf{E}[Y] \ .$$

1. On voudrait une variable aléatoire X qui corresponde informellement à $(Y|Y \neq 0)$. Comment la définir proprement (on pourra changer d'espace de probabilité)?

2. Comparer $\mathbf{E}[X]^2$ et $\mathbf{E}\left[X^2\right]$.

3. Conclure.

Exercice 2. *Suite de bits aléatoires*

On se donne X_i une suite infinie de bits aléatoires non biaisés.

1. Montrer que presque sûrement tout mot fini apparaît dans la suite X_i.

2. En déduire que la presque sûrement tout mot fini apparaît une infinité de fois dans la suite X_i.

Exercice 3. *Improving Random Algorithm*

Suppose you are given a randomized polynomial-time algorithm $\mathcal{A}$ for deciding whether $x \in \{0,1\}^*$ is in the language L or not. Suppose it has the following property. If $x \in L$, then $\mathbf{P}\{\mathcal{A}(x) = 0\} \leq 1/4$ and if $x \notin L$, then $\mathbf{P}\{\mathcal{A}(x) = 1\} \leq 1/3$. Note that the probability here is taken over the randomness used by the algorithm $\mathcal{A}$ and *not* over the input x.

1. Construct a randomized polynomial-time algorithm $\mathcal{B}$ that is allowed to make independent calls to $\mathcal{A}$ such that for all inputs $x \in \{0,1\}^*$, we have $\mathbf{P}\{\mathcal{B}(x) = \mathbf{1}_{x \in L}\} \geq 1 - 2^{-|x|}$. Here $\mathbf{1}_{x\in L} = 1$ if $x \in L$ and 0 otherwise, and $|x|$ denotes the length of the bitstring x.

Exercice 4. *K4*

Soit G un graphe aléatoire de loi $G_{n,p}$. L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il y a un seuil $p_0 := n^{-2/3}$ tel que pour $p = o(p_0)$, le graphe G n'a pas de clique de taille 4 avec bonne probabilité, et que pour $p = \omega(p_0)$, le graphe G a au moins une clique de taille 4 avec bonne probabilité.

Rappels / définitions:

- Un graphe aléatoire G suit la loi $G_{n,p}$ s'il a n sommets et que chaque arrête est présente dans G avec probabilité p;
- une clique de taille 4 est un ensemble de 4 sommets tous reliés deux à deux par des arêtes;
- $p = o(p_0)$ signifie $\frac{p}{p_0} \to 0$ quand $n \to +\infty$;
- $p = \omega(p_0)$ signifie $\frac{p_0}{p} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

1. Pour p quelconque, calculer $\mathbf{E}[X]$, où X est le nombre de cliques du graphe G.

2. Soit $p = o(p_0)$, montrer que $\Pr(X \neq 0) \to 0$ quand n tend vers l'infini.

On suppose maintenant $p = \omega(p_0)$, et on veut montrer que $\mathbf{P}\left\{X = 0\right\} \to 0$ quand n tend vers l'infini.

3. Montrer que $\mathbf{P}\left\{X = 0\right\} \leq \frac{\mathbf{Var}[X]}{\mathbf{E}[X]^2}$. Il suffira donc de montrer que $\frac{\mathbf{Var}[X]}{\mathbf{E}[X]^2} \to 0$.

4. Soit X_i des variables aléatoires à valeur dans $0, 1$ (et non indépendantes). Montrer que

$$\mathbf{Var}\left[\sum_i X_i\right] \leq \mathbf{E}\left[\sum_i X_i\right] + \sum_{i \neq j} \mathbf{E}\left[(X_i - \mathbf{E}\left[X_i\right])(X_j - \mathbf{E}\left[X_j\right])\right].$$

5. En déduire que $\mathbf{Var}\left[X\right] = o(\mathbf{E}\left[X\right]^2)$ et conclure.

Exercice 5. *Interrupteurs*

Partie I :

1. Montrer qu'il existe une constante $\gamma > 0$ rendant l'énoncé suivant vrai : si une v.a. positive X vérifie $\mathbb{E}[X] = 1$ et $\mathbb{E}[X^2] \leq 3$, alors $\mathbb{P}(X \geq 1/4) \geq \gamma$.

2. Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des v.a. i.i.d. vérifiant $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $Y = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n)$. Calculer $\mathbb{E}[Y^2]$ et $\mathbb{E}[Y^4]$ et en déduire que

$$\mathbb{E}[|X_1 + \cdots + X_n|] \geq \frac{\gamma}{2}\sqrt{n}.$$

Partie II :

On considère une grille $n \times n$ d'ampoules ainsi que 3 séries d'interrupteurs : des interrupteurs $a = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ associés à chaque ampoule, des interrupteurs $b = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ associés à chaque ligne et des interrupteurs $c = (c_j)_{1 \leq j \leq n}$ associés à chaque colonne. Chaque interrupteur prend la valeur -1 ou 1. L'ampoule en position (i, j) est allumée si et seulement si $a_{ij} b_i c_j = 1$. On considère la quantité

$$F(a, b, c) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_i c_j$$

qui est le nombre d'ampoules allumées moins le nombre d'ampoules éteintes. Enfin, deux joueurs jouent au jeu suivant : le joueur 1 choisit la position des interrupteurs (a_{ij}), puis le joueur 2 choisit la position des interrupteurs (b_i) et (c_j). Le joueur 1 veut minimiser $F(a, b, c)$ et joueur 2 veut le maximiser. On considère donc

$$V(n) = \min_{a \in \{-1,1\}^{n \times n}} \max_{b,c \in \{-1,1\}^n} F(a, b, c).$$

3. Montrer que $V(n) = O(n^{3/2})$ en considérant le cas où le joueur 1 joue au hasard.

4. Le joueur 2 applique la stratégie suivante : il choisit b au hasard, puis ensuite choisit c de façon à allumer le maximum de lampes. Estimer le nombre moyen de lampes allumées par cette stratégie à l'aide de la question I.2 et en déduire que $V(n) = \Omega(n^{3/2})$.