Matrikulasi Matematika Terapan & Matematika Diskrit

[RPLD422104 & RPLD4222013]

Program peralihan D3 MI ke D4 TRPL

Dewi Sintiari

Prodi D4 Teknologi Rekayasa Perangkat Lunak

Universitas Pendidikan Ganesha

1 Juni 2023

Daftar Isi

Bagian 2.1: Logika Matematika

Proposisi atau bukan?

- 3 adalah bilangan ganjil.
- Soeharto pernah menjadi wakil presiden Indonesia.
- Mahasiswa TRPL tidak ada yang pemalas.
- Suhu di permukaan laut adalah 21 derajat Celcius.
- $x + 3 = 8$.
- Kapan semester ganjil tahun ajaran baru dimulai?
- Jika kamu mahasiswa, maka kamu harus melaksanakan tugas dengan baik.
- Belajarlah dengan sungguh-sungguh!

Operator logika

Diberikan proposisi:

- p: Gedung itu tinggi
- q: Gedung itu modern

Operator logika

Diberikan proposisi:

- p: Gedung itu tinggi
- q: Gedung itu modern

Nyatakan dalam ekspresi logika:

1. Gedung itu tinggi dan modern.
2. Gedung itu tinggi tapi tidak modern.
3. Gedung itu tidak tinggi maupun modern.
4. Tidak benar bahwa gedung itu rendah atau tidak modern.
5. Gedung itu tinggi, atau rendah dan modern.
6. Tidak benar bahwa gedung itu rendah maupun modern.

Operator logika

Diberikan proposisi:

- p: Gedung itu tinggi
- q: Gedung itu modern

Operator apa yang Anda gunakan?

1. Gedung itu tinggi dan modern.
2. Gedung itu tinggi tapi tidak modern.
3. Gedung itu tidak tinggi maupun modern.
4. Tidak benar bahwa gedung itu rendah atau tidak modern.
5. Gedung itu tinggi, atau rendah dan modern.
6. Tidak benar bahwa gedung itu rendah maupun modern.

Operator logika

Diberikan proposisi:

- p: Gedung itu tinggi
- q: Gedung itu modern

Operator apa yang Anda gunakan?

1. Gedung itu tinggi dan modern. $\rightarrow$ *konjungsi*
2. Gedung itu tinggi tapi tidak modern.
3. Gedung itu tidak tinggi maupun modern.
4. Tidak benar bahwa gedung itu rendah atau tidak modern.
5. Gedung itu tinggi, atau rendah dan modern.
6. Tidak benar bahwa gedung itu rendah maupun modern.

Operator logika

Diberikan proposisi:

- p: Gedung itu tinggi
- q: Gedung itu modern

Operator apa yang Anda gunakan?

1. Gedung itu tinggi dan modern. $\rightarrow$ *konjungsi*
2. Gedung itu tinggi tapi tidak modern. $\rightarrow$ *konjungsi*, *negasi*
3. Gedung itu tidak tinggi maupun modern.
4. Tidak benar bahwa gedung itu rendah atau tidak modern.
5. Gedung itu tinggi, atau rendah dan modern.
6. Tidak benar bahwa gedung itu rendah maupun modern.

Operator logika

Diberikan proposisi:

- p: Gedung itu tinggi
- q: Gedung itu modern

Operator apa yang Anda gunakan?

1. Gedung itu tinggi dan modern. $\rightarrow$ *konjungsi*
2. Gedung itu tinggi tapi tidak modern. $\rightarrow$ *konjungsi*, *negasi*
3. Gedung itu tidak tinggi maupun modern. $\rightarrow$ *negasi*, *konjungsi*
4. Tidak benar bahwa gedung itu rendah atau tidak modern.
5. Gedung itu tinggi, atau rendah dan modern.
6. Tidak benar bahwa gedung itu rendah maupun modern.

Operator logika

Diberikan proposisi:

- p: Gedung itu tinggi
- q: Gedung itu modern

Operator apa yang Anda gunakan?

1. Gedung itu tinggi dan modern. $\rightarrow$ *konjungsi*
2. Gedung itu tinggi tapi tidak modern. $\rightarrow$ *konjungsi*, *negasi*
3. Gedung itu tidak tinggi maupun modern. $\rightarrow$ *negasi*, *konjungsi*
4. Tidak benar bahwa gedung itu rendah atau tidak modern. $\rightarrow$ *negasi*, *negasi*, *disjungsi*
5. Gedung itu tinggi, atau rendah dan modern.
6. Tidak benar bahwa gedung itu rendah maupun modern.

Operator logika

Diberikan proposisi:

- p: Gedung itu tinggi
- q: Gedung itu modern

Operator apa yang Anda gunakan?

1. Gedung itu tinggi dan modern. $\rightarrow$ *konjungsi*
2. Gedung itu tinggi tapi tidak modern. $\rightarrow$ *konjungsi*, *negasi*
3. Gedung itu tidak tinggi maupun modern. $\rightarrow$ *negasi*, *konjungsi*
4. Tidak benar bahwa gedung itu rendah atau tidak modern. $\rightarrow$ *negasi*, *negasi*, *disjungsi*
5. Gedung itu tinggi, atau rendah dan modern. $\rightarrow$ *disjungsi*, *negasi*, *konjungsi*
6. Tidak benar bahwa gedung itu rendah maupun modern.

Operator logika

Diberikan proposisi:

- p: Gedung itu tinggi
- q: Gedung itu modern

Operator apa yang Anda gunakan?

1. Gedung itu tinggi dan modern. $\rightarrow$ *konjungsi*
2. Gedung itu tinggi tapi tidak modern. $\rightarrow$ *konjungsi*, *negasi*
3. Gedung itu tidak tinggi maupun modern. $\rightarrow$ *negasi*, *konjungsi*
4. Tidak benar bahwa gedung itu rendah atau tidak modern. $\rightarrow$ *negasi*, *negasi*, *disjungsi*
5. Gedung itu tinggi, atau rendah dan modern. $\rightarrow$ *disjungsi*, *negasi*, *konjungsi*
6. Tidak benar bahwa gedung itu rendah maupun modern. $\rightarrow$ *negasi*, *negasi*, *konjungsi*

Proposisi bersyarat (implikasi & biimplikasi)

Nyatakan setiap proposisi berikut menjadi proposisi bersyarat.

1. Dian bisa lulus sarjana apabila ia telah menyelesaikan 144 SKS.
2. Sebuah program hanya bisa dibaca jika ia terstruktur dengan baik.
3. Syarat cukup bagi Lukman untuk mengambil MK DAA adalah ia sudah lulus MK Matematika Diskrit.
4. Perlu mendaki 100 meter lagi untuk mencapai gunung itu.
5. Saya akan pergi ke pasar hanya jika sayur-sayuran di kulkas sudah habis.
6. Bilangan yang habis dibagi 2 adalah bilangan genap.
7. Jika nilai ujian saya ≥ 75 maka saya lulus dan jika nilai saya < 75 maka saya tidak lulus.

Solusi proposisi bersyarat (implikasi & biimplikasi)

Negasi (ingkaran)

Tentukan ingkaran dari pernyataan berikut:

1. Dian bisa lulus sarjana apabila ia telah menyelesaikan 144 SKS.
   Jawab:

2. Saya akan pergi ke pasar hanya jika sayur-sayuran di kulkas sudah habis.
   Jawab:

3. Jika nilai ujian saya ≥ 75 maka saya lulus dan jika nilai saya < 75 maka saya tidak lulus.
   Jawab:

Konvers, invers, dan kontraposisi

Diberikan sebuah proposisi:

Sebuah program hanya bisa dibaca jika ia terstruktur dengan baik.

- **Konvers:**
- **Invers:**
- **Kontraposisi:**

Konvers, invers, dan kontraposisi

Diberikan sebuah proposisi:

Sebuah program hanya bisa dibaca jika ia terstruktur dengan baik.

- **Konvers:**
- **Invers:**
- **Kontraposisi:**

Pertanyaan: di antara keempat proposisi tersebut, manakah yang *ekuivalen* (memiliki nilai kebenaran yang sama)?

Pembuktian ekuivalensi

Untuk membuktikan ekuivalensi dua proposisi, digunakan *tabel kebenaran*.

Contoh:

- p: Program bisa dibaca.
- q: Program terstruktur dengan baik.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\neg p \Rightarrow \neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Pembuktian ekuivalensi

Untuk membuktikan ekuivalensi dua proposisi, digunakan *tabel kebenaran*.

Contoh:

- p: Program bisa dibaca.
- q: Program terstruktur dengan baik.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\neg p \Rightarrow \neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
T	T	F	F	**T**	T	T	**T**
T	F	F	T	**F**	T	T	**F**
F	T	T	F	**T**	F	F	**T**
F	F	T	T	**T**	T	T	**T**

Argumen

Definisi

Argumen dalam logika proporsional adalah barisan proposisi. Pada argumen, proposisi yang bukan merupakan proposisi akhir disebut premis dan proposisi akhir disebut kesimpulan.

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline q \end{array}$$

Dalam hal ini, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ disebut hipotesis (premis) dan q disebut kesimpulan (konklusi).

Diberikan beberapa proposisi. Dari rangkaian proposisi tersebut dapat ditarik sebuah kesimpulan. Proses ini disebut inferensi.

Inferensi (penarikan kesimpulan)

Metode penarikan kesimpulan

1. Modus ponen $\rightarrow$

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$$

2. Modus tollen $\rightarrow$

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg q$$

3. Silogisme $\rightarrow$

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Gunakan tabel kebenaran untuk memeriksa validitas metode penarikan kesimpulan tersebut.

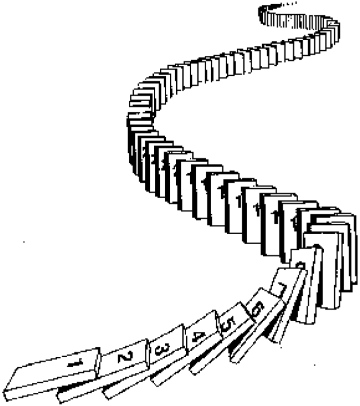
Inferensi (penarikan kesimpulan)

Periksalah kesahihan argumen berikut.

1. Jika hari panas, Made mimisan. Hari tidak panas. Oleh karena itu, Made tidak mimisan.
2. Jika hari panas, Made mimisan. Made tidak mimisan. Oleh karena itu, hari tidak panas.
3. Jika Made mimisan, maka hari panas. Hari tidak panas. Oleh karena itu, Made mimisan.
4. Jika hari tidak panas, Made tidak mimisan. Hari panas. Oleh karena itu, Made mimisan.
5. Jika Made tidak mimisan, hari tidak panas. Made mimisan. Oleh karena itu, hari panas.

Bagian 2.2: Induksi Matematika

Induksi Matematika



Prinsip Induksi Matematika

Misalkan $p(n)$ adalah suatu pernyataan yang berlaku untuk bilangan bulat. Kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat ≥ 0. Maka cukup dibuktikan bahwa:

1. $p(n_0)$ benar; dan
2. jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ benar.

Ini berarti bahwa $p(n)$ benar untuk setiap $n \geq n_0$.

Komponen induksi:

1. Basis Induksi
2. Hipotesis Induksi
3. Pembuktian Hipotesis

Contoh induksi

Temukan rumus jumlah dari n bilangan ganjil positif yang pertama.

Misalkan untuk $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

- $n = 1 \;\rightarrow\; 1 = 1$
- $n = 2 \;\rightarrow\; 1 + 3 = 4$
- $n = 3 \;\rightarrow\; 1 + 3 + 5 = 9$
- $n = 4 \;\rightarrow\; 1 + 3 + 5 + 7 = 16$
- $n = 5 \;\rightarrow\; 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

Tebakan: *Jumlah dari n bilangan ganjil positif pertama adalah* n^2.

Membuktikan dengan induksi

Untuk setiap bilangan bulat positif n, buktikan bahwa:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Solusi:

Basis induksi: Untuk $n = 1$, berlaku: $1 = 1^2 = 1$

Langkah induksi:

- *Hipotesis:* Andaikan bahwa $p(n)$ benar, yakni:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

- *Pembuktian hipotesis:* Akan ditunjukkan bahwa $p(n + 1)$ benar:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Bukti:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Latihan 1

Buktikan dengan Induksi Matematika bahwa:

Untuk tiap ≥ 3*, jumlah sudut dalam poligon dengan n sisi adalah* $180(n-2)^o$*.*

Solusi:

- **Basis:**

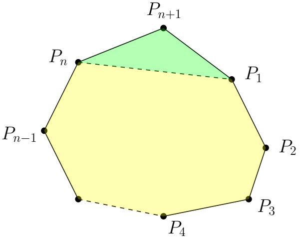
  Untuk $n = 3$, poligon merupakan segitiga, dengan jumlah sudut $180^o = 180(3-2)^o$. Jadi proposisi tersebut benar.

- **Hipotesis:**

  Asumsikan bahwa proposisi benar untuk n-gon, yaitu jumlah sudutnya adalah $180(n-2)^o$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $(n+1)$-gon memiliki jumlah sudut $180(n-1)^o$.

Latihan 1 (*lanjutan*)



- Misalkan $(n+1)$-gon adalah $P_1 P_2 \ldots P_n$.
- Poligon tersebut dibentuk oleh n-gon kuning dan segitiga hijau.
- Sesuai hipotesis, jumlah sudut-sudut pada n-gon adalah $180(n-2)^o$.
- Jumlah sudut pada $(n+1)$-gon $=$ jumlah sudut n-gon $+$ jumlah sudut segitiga, yaitu:

$$180(n-2)^o + 180^o = 180(n-1)^o$$

Dengan demikian, proposisi terbukti.

Latihan 2

Diketahui bahwa pada suatu pesta, setiap tamu berjabat tangan dengan tamu lainnya tepat satu kali. Buktikan dengan Induksi Matematika bahwa jika terdapat n tamu, maka banyaknya jabat tangan yang terjadi adalah:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Latihan 2 (*lanjutan*)

Solusi:

- **Basis:**

  Basis induksi dapat dicek untuk $n = 1$ atau $n = 2$.
  Untuk $n = 1$, banyaknya jabat tangan adalah $\frac{1(1-1)}{2} = 0$.
  Untuk $n = 2$, banyaknya jabat tangan adalah $\frac{2(2-1)}{2} = 1$.

- **Hipotesis:**

  Asumsikan bahwa banyaknya jabat tangan yang terjadi jika ada n tamu adalah: $\frac{n(n-1)}{2}$.

Akan dibuktikan bahwa jika terdapat $\frac{n(n+1)}{2}$ jabat tangan di antara $(n+1)$ tamu.

Latihan 2 (*lanjutan*)

- Pembuktian hipotesis:

  Perhatikan tamu ke-$(n+1)$. Tamu tersebut berjabat tangan dengan n tamu lainnya.

  Sesuai hipotesis, n tamu lainnya berjabat tangan satu sama lain sebanyak $\frac{n(n-1)}{2}$ kali.

  Jadi, banyaknya jabat tangan yang terjadi adalah:

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1)+2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bagian 2.3: Prinsip inklusi-eksklusi, permutasi & kombinasi

Aturan pencacahan

Contoh kasus:

- Misal nomor plat kendaraan di negara X terdiri dari 5 angka diikuti dengan 2 huruf, dimana angka pertama tidak boleh 0.

  Berapa banyak nomor plat mobil yang dapat dibuat?

- Misal *password* sebuah sistem komputer terdiri dari 6-8 karakter, dalam bentuk angka/huruf, dimana huruf kapital dan huruf kecil tidak dibedakan.

  Berapa banyak sandi yang dapat dibuat?

- Dari 20 anggota BEM, akan dibentuk pengurus inti yang beranggotakan 6 orang.

  Berapa banyak cara memilih anggota komisi bila seorang anggota A harus termasuk di dalam komisi tersebut?

Kaidah dasar menghitung

Kaidah perkalian (rule of product)

- Percobaan 1 menghasilkan p percobaan;
- Percobaan 2 menghasilkan q percobaan;
- Maka Percobaan 1 dan 2 menghasilkan pq kemungkinan.

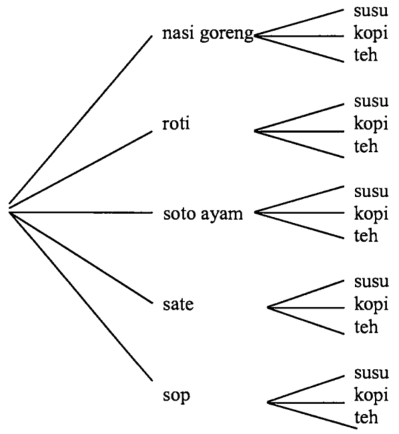
Kaidah penjumlahan (rule of sum)

- Percobaan 1 menghasilkan p percobaan;
- Percobaan 2 menghasilkan q percobaan;
- Maka Percobaan 1 dan 2 menghasilkan $p + q$ kemungkinan.

Contoh penerapan kaidah perkalian

Contoh

Sebuah restoran menyediakan lima jenis makanan:
nasi goreng, roti, soto, sate, sop
dan tiga jenis minuman yaitu: susu, kopi, teh



Latihan

Soal: Sebuah *password* pada suatu sistem komputer memiliki panjang enam s.d. delapan karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf atau angka; huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan. Tentukan banyaknya sandi yang dapat dibuat.

Solusi:

Contoh

Tentukan banyaknya *byte* yang dimulai dengan 11 **atau** berakhir dengan 11 (setiap *byte* disusun oleh 8-bit).

Solusi:

Misal:

- A = himpunan *byte* yang dimulai dengan '11'
- B = himpunan *byte* yang diakhiri dengan '11'
- $A \cap B$ = himpunan *byte* yang berawal dan berakhir dengan '11'

Maka:

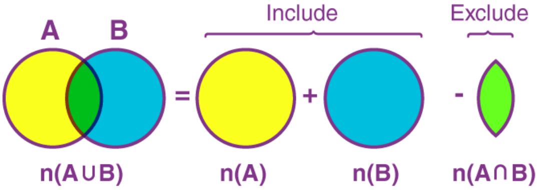
$A \cup B$ = *himpunan byte yang berawal dengan '11' atau berakhir dengan '11'*

Contoh (*lanjutan*)

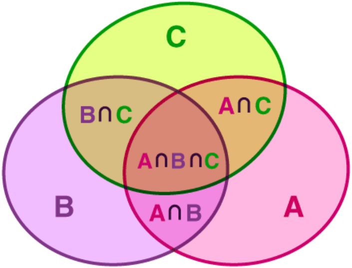
- $|A| = 2^6 = 64$
- $|B| = 2^6 = 64$
- $|A \cap B| = 2^4 = 16$

Dengan menggunakan prinsip Inklusi-Eksklusi, diperoleh:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 64 + 64 - 16 = 112$$



Prinsip Inklusi-Ekslusi untuk tiga himpunan



Latihan

Soal: Dari 50 siswa, 30 siswa menyukai aritmetika, 30 siswa menyukai geometri, dan 30 siswa menyukai aljabar. Banyaknya siswa yang menyukai aritmetika dan geometri adalah 15 orang. Banyaknya siswa yang menyukai aritmetika dan aljabar juga 15 orang, sama halnya dengan yang menyukai aljabar dan geometri. Berapa banyak siswa yang menyukai ketiga-ketiganya?

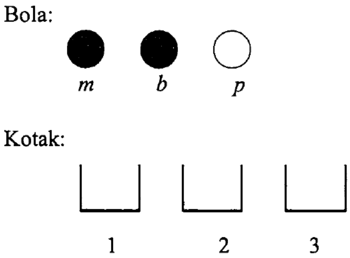
Solusi:

Contoh motivasi 1

Misalkan ada 3 bola dengan warna berbeda yaitu:

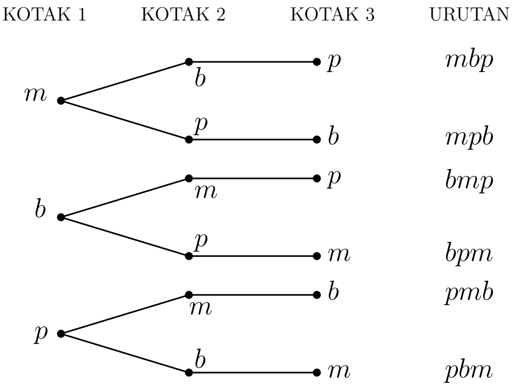
merah (m), biru (b), dan putih (p)

Bola akan dimasukkan ke dalam tiga kotak, dimana setiap kotak terdiri dari 1 bola.



Tentukan banyaknya urutan berbeda untuk menempatkan bola ke dalam kotak.

Contoh motivasi 1 (*solusi*)



Urutan berbeda ditentukan oleh banyaknya permutasi.

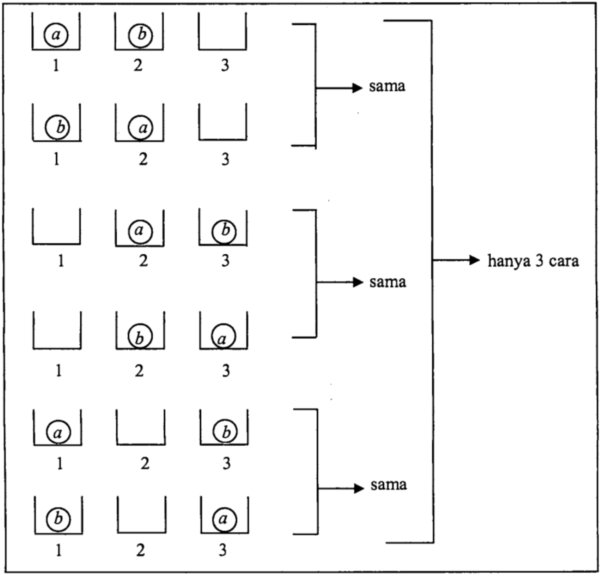
Contoh motivasi 2

Misalkan ada 2 bola berwarna merah, yaitu bola a dan bola b, serta 3 kotak.

Kita ingin memasukkan bola ke dalam kotak, dimana setiap kotak memuat paling banyak 1 bola.

> *Tentukan banyaknya cara menempatkan bola ke dalam kotak-kotak tersebut.*

Contoh motivasi 1 (*solusi*)



Analisis

Perbedaan apa yang Anda amati dari dua contoh tersebut?

Latihan 1: permutasi atau kombinasi?

Tentukan banyaknya cara memilih 3 dari 4 elemen himpunan $A = \{a, b, c, d\}$.

Solusi:

Himpunan bagian A dengan 3 elemen	Permutasi setiap himpunan bagian
$\{a, b, c\}$	$abc, acb, bca, bac, cab, cba$
$\{a, b, d\}$	$abd, adb, bda, bad, dab, dba$
$\{a, c, d\}$	$acd, adc, cda, cad, dac, dca$
$\{b, c, d\}$	$bcd, bdc, cdb, cbd, dbc, dcb$

Latihan 1: permutasi atau kombinasi?

Tentukan banyaknya cara memilih 3 dari 4 elemen himpunan $A = \{a, b, c, d\}$.

Solusi:

Himpunan bagian A dengan 3 elemen	Permutasi setiap himpunan bagian
$\{a, b, c\}$	*abc*, *acb*, *bca*, *bac*, *cab*, *cba*
$\{a, b, d\}$	*abd*, *adb*, *bda*, *bad*, *dab*, *dba*
$\{a, c, d\}$	*acd*, *adc*, *cda*, *cad*, *dac*, *dca*
$\{b, c, d\}$	*bcd*, *bdc*, *cdb*, *cbd*, *dbc*, *dcb*

Banyaknya cara memilih 3 elemen dari 4 elemen pada himpunan adalah:

$$C(4,3) = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = 4$$

Latihan 2: permutasi atau kombinasi?

Tentukan banyaknya cara menyusun tiga menu nasi goreng dalam seminggu.

Solusi:

- Nasi goreng dapat diasumsikan sebagai bola;
- Hari dalam seminggu dapat diasumsikan sebagai kotak.
- Tugas ini dapat dipandang sebagai masalah meletakkan 3 bola identik dalam 7 kotak berbeda.

Banyaknya cara berbeda adalah:

$$C(7,3) = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$$

Bagian 2.4: Probabilitas kejadian

Konsep peluang diskrit

Misalkan sebuah koin di-tos. Berapakah kemungkinan munculnya **lambang garuda**?

Probabilitas secara formal

Dalam pengetosan sebuah koin, terdapat dua kemungkinan gambar yang muncul, yaitu:

- Lambang garuda (G)
- Peta Indonesia (I)

$$\text{Probabilitas} = \frac{\text{Banyaknya kemungkinan yang memenuhi syarat}}{\text{Banyaknya seluruh kemungkinan}}$$

Contoh

Pada pengetosan sebuah koin, probabilitas munculnya gambar garuda adalah:

$$P(G) = \frac{1}{2}$$

Coba bandingkan nilai ini dengan hasil eksperimen Anda. Jelaskan!

Konsep peluang diskrit

Contoh

Dalam proses rekrutmen di suatu perusahaan, dicari dua orang karyawan baru. Jika banyaknya pelamar adalah 100, berapakah **kemungkinan** *seorang pelamar akan diterima?*

Solusi:

Ruang sampel

- Pada pelemparan sebuah koin, terdapat dua kemungkinan yang muncul, yaitu:

$$\text{angka}, \text{gambar}$$

- Pada pengetosan sebuah dadu, terdapat 6 kemungkinan hasil yang muncul, yaitu sbb:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6$$

- Pada pengacakan kartu remi, terdapat 52 kartu yang mungkin:
  - Heart : $1, \ldots, 10$, As, Q, J, K
  - Diamond : $1, \ldots, 10$, As, Q, J, K
  - Spade : $1, \ldots, 10$, As, Q, J, K
  - Club : $1, \ldots, 10$, As, Q, J, K

Definisi

Himpunan semua kemungkinan kejadian yang mungkin dari suatu percobaan disebut RUANG SAMPEL. Setiap elemen himpunan tersebut disebut titik sampel.

Peluang sederhana (1)

Soal: Pada percobaan pelemparan dadu, diketahui $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Berapakah peluang munculnya angka ganjil?

Solusi:

Peluang sederhana (2)

Soal: Pada percobaan pelemparan dua dadu, berapakah peluang munculnya angka-angka dadu yang jumlahnya sama dengan 8?

Solusi:

Dua kejadian saling lepas

Soal: Pada pengetosan sebuah dadu dan sebuah uang logam, berapakah peluang munculnya mata dadu bilangan genap **atau** angka pada uang logam?

Solusi:

Dua kejadian saling bebas

Soal: Pada pengetosan sebuah dadu dan sebuah uang logam, berapakah peluang munculnya mata dadu bilangan genap **dan** angka pada uang logam?

Solusi:

Gabungan konsep kejadian saling lepas dan saling bebas

Soal: Di antara 100 bilangan bulat positif pertama, berapakah peluang memilih secara acak sebuah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5?

Solusi:

Menggunakan konsep permutasi dan kombinasi dalam peluang

Soal: Seperangkat kartu remi berisi 52 kartu, terdiri dari 4 jenis kartu, masing-masing 13 kartu yakni: $2, 3, \ldots, 10$, Joker, King, Queen, As.

Jika setiap pemain remi mendapatkan 5 kartu, berapakah peluang dari 5 kartu tersebut memuat 4 kartu dari jenis yang sama?

Solusi:

Menggunakan konsep permutasi dan kombinasi dalam peluang

Soal: Seperangkat kartu remi berisi 52 kartu, terdiri dari 4 jenis kartu, masing-masing 13 kartu yakni: $2, 3, \ldots, 10$, Joker, King, Queen, As.

Jika setiap pemain remi mendapatkan 5 kartu, berapakah peluang dari 5 kartu tersebut memuat 4 kartu dari jenis yang sama?

Solusi:

Hint:

- Tentukan kemungkinan jenis kartu yang sama.
- Dari jenis tersebut, tentukan kemungkinan mengambil 4 kartu.
- Tentukan kemungkinan mengambil 1 kartu dari sisa kartu yang ada.

lanjutan

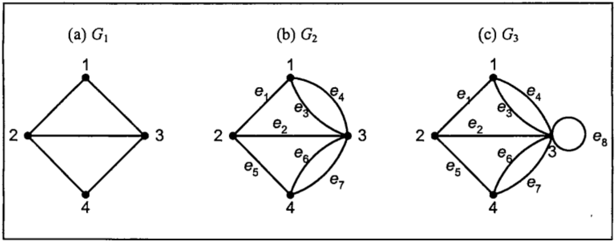
Bagian 2.5: Pemodelan dengan graf

Graf

Notasi Graf

Graf $G = (V, E)$ memiliki dua komponen, yaitu:

- Simpul/titik/verteks, himpunannya dinotasikan dengan $V(G)$
- Sisi, himpunannya dinotasikan dengan $E(G)$



Latihan: Tentukan himpunan simpul dan himpunan sisi dari graf pada gambar di atas.

Contoh permasalahan pada graf sederhana

Contoh permasalahan: misalnya pada pencarian jalur terpendek antar-kota

- setiap kota dilambangkan dengan simpul graf;
- dua simpul dihubungkan oleh sebuah sisi jika terdapat jalan yang menghubungkan kedua kota tersebut.

Pemodelan menggunakan graf sederhana misalnya pada skenario bahwa setiap kota dihubungkan oleh paling banyak satu jalan.

Matriks ketetanggaan (1)

Matriks ketetanggaan untuk graf dengan n simpul adalah matriks A berukuran $n \times n$, dengan ketentuan:

- indeks baris dan kolomnya adalah simpul-simpul pada graf;
- nilai entri $a_{ij} = 1$ jika simpul i dan j bertetangga, dan $a_{ij} = 0$ jika simpul i dan j tidak bertetangga.

Representasi lainnya:

- Matriks insidensi
- List ketetanggaan

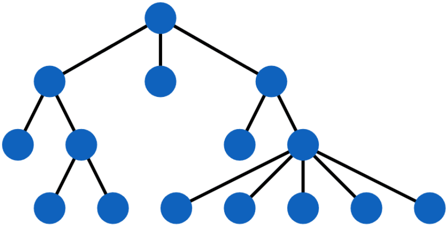
Jenis graf

- Graf sederhana
- Graf tidak sederhana
- Graf tidak berarah
- Graf berarah
- Graf tidak berbobot
- Graf berbobot

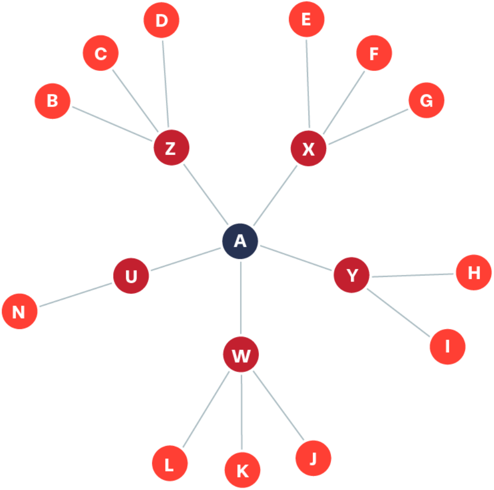
Graf-graf khusus

- Graf pohon
- Graf lengkap
- Graf planar
- dsb.

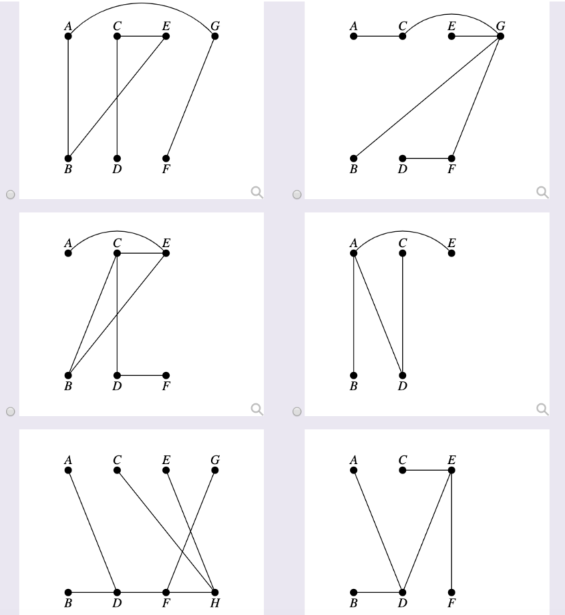
Graf pohon



Graf pohon



Graf pohon



Ciri-ciri graf pohon

Graf pohon adalah graf yang memenuhi kriteria berikut.

- tak berarah
- sederhana
- terhubung
- tidak memuat sirkuit

Sifat-sifat graf pohon

Diskusikan kebenaran sifat-sifat graf pohon berikut.

Teorema

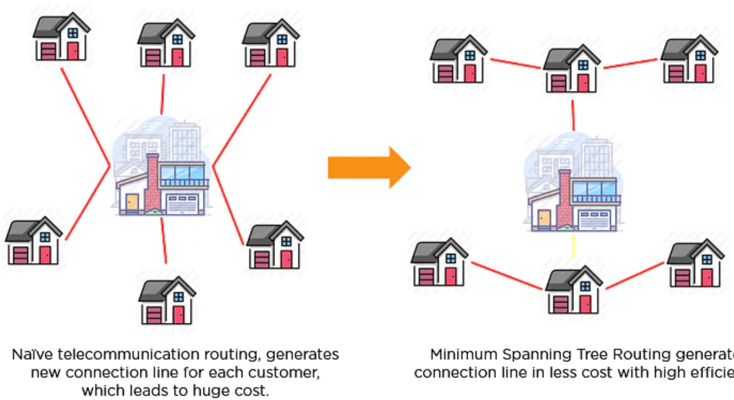
Misalkan $G = (V, E)$ *adalah graf tak-berarah sederhana dengan banyaknya simpul* n*. Maka pernyataan berikut ekuivalen:*

1. G *adalah graf pohon.*
2. *Untuk setiap pasang simpul* u *dan* v*, terdapat tepat satu lintasan yang menghubungkan* u *dan* v *di* G*.*
3. G *terhubung dan memiliki sebanyak* $(n-1)$ *sisi.*
4. G *tidak memuat sirkuit dan memiliki* $(n-1)$ *sisi.*
5. G *tidak memuat sirkuit dan penambahan satu sisi pada graf menghasilkan tepat satu sirkuit.*
6. G *terhubung dan menghapus sebuah sisi akan menyebabkan* G *menjadi tidak terhubung.*

Pohon merentang (*spanning tree*)

Sebuah subgraf dikatakan merentang jika subgraf tersebut memuat semua simpul graf.

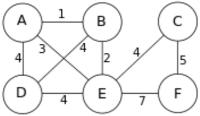
Pohon merentang adalah subgraf yang merentang dan membentuk sebuah graf pohon.

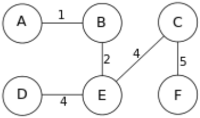


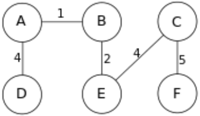
Pohon merentang minimum (*minimum spanning tree*)

Graf berbobot adalah graf yang sisi-sisinya memiliki bobot (di $\mathbb{R}$). Graf terhubung berbobot mungkin memiliki lebih dari satu pohon merentang.

- **Interest:** pohon merentang minimum

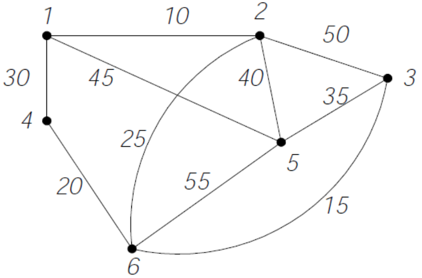




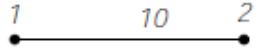
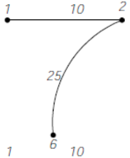
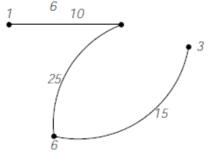
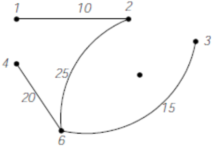


Contoh pencarian pohon merentang minimum (1)

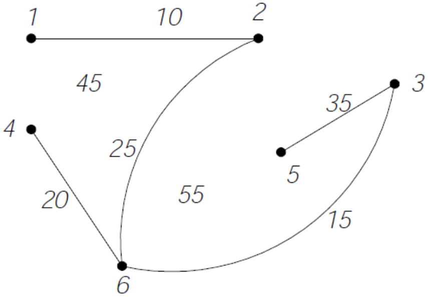
Diberikan pohon merentang sebagai berikut. Tentukan pohon merentang minimum-nya dengan cara membuat daftar pohon merentang yang mungkin dari graf tersebut.



Contoh pencarian pohon merentang minimum (2)

Langkah	Sisi	Bobot	Pohon rentang
1	(1, 2)	10	
2	(2, 6)	25	
3	(3, 6)	15	
4	(4, 6)	20	

Contoh pencarian pohon merentang minimum (3)



$$\text{Bobot} = 10 + 25 + 15 + 20 + 35 = 105$$

Algoritma pencarian *Minimum Spanning Tree*

- Algoritma Kruskal
- Algoritma Prim

end of slide...

Referensi

Rinaldi Munir.
Matematika Diskrit edisi 3.
Informatika, Institut Teknologi Bandung, 2010.