Matrikulasi Matematika Terapan & Matematika Diskrit

[RPLD422104 & RPLD4222013]

Program peralihan D3 MI ke D4 TRPL

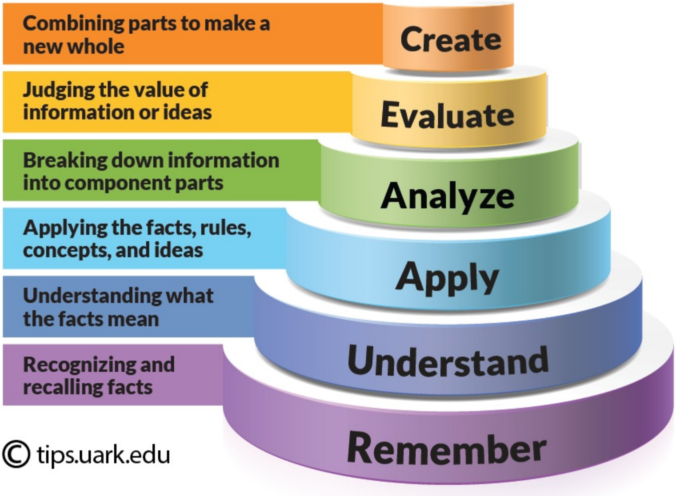
Dewi Sintiari

Prodi D4 Teknologi Rekayasa Perangkat Lunak

Universitas Pendidikan Ganesha

1 Juni 2023

D3 $\rightarrow$ D4



Matematika Dasar $\rightarrow$ *Matematika Terapan*

Daftar Isi

Bagian 1.1: Sistem bilangan & himpunan

Sistem bilangan/himpunan bilangan

- Himpunan bilangan *asli (natural)*: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Himpunan bilangan *bulat (integer)*:
  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Himpunan bilangan *rasional*: $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
- Himpunan bilangan *irrasional* $\mathbb{P}$: e.g. $\sqrt{3}$, π, etc.
- Himpunan bilangan *riil*: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{P}$

Notasi Interval: Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$,

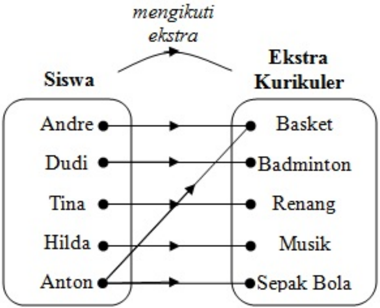
1. $(a, b) = \{\, x \mid a < x < b \,\}$ 
2. $[a, b] = \{\, x \mid a \leq x \leq b \,\}$ 
3. $[a, b) = \{\, x \mid a \leq x < b \,\}$ 
4. $(a, b] = \{\, x \mid a < x \leq b \,\}$ 
5. $(a, \infty) = \{\, x \mid x > a \,\}$ 
6. $[a, \infty) = \{\, x \mid x \geq a \,\}$
7. $(-\infty, b) = \{\, x \mid x < b \,\}$
8. $(-\infty, b] = \{\, x \mid x \leq b \,\}$
9. $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

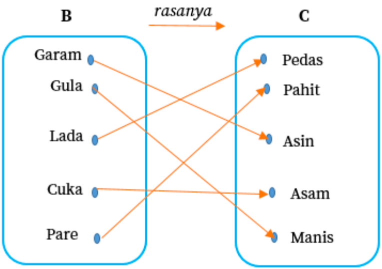
Remark. ∞ dan $-\infty$ bukan bilangan riil

Bagian 1.2: Fungsi

Fungsi

Misalkan A dan B dua buah himpunan. Fungsi dari A ke B adalah aturan memasangkan (memadankan) setiap elemen di A dengan satu elemen di B.





Bila elemen-elemen dari A lebih banyak dari elemen-elemen B, dapatkah kita membuat fungsi dari A ke B?

Unsur fungsi

Untuk fungsi: $\boxed{f : A \to B}$

- A disebut domain dari f;
- B disebut kodomain dari f;
- Jika $f(a) = b$, maka b disebut bayangan (*image*) dari a, dan a adalah *pre-image* dari b;
- Daerah hasil (*range*) dari f adalah himpunan semua bayangan dari elemen di A.

Latihan

Tentukan daerah definisi dan daerah hasil dari fungsi berikut.

1. $f(x) = x + \sqrt{x}$
2. $f(x) = x^2$ dimana $-1 \leq x \leq 1$
3. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ 1 \; x > 0 & \end{cases}$
4. $f(x) = |x|$
5. $f(x) = [|x|]$ (bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x)

1. Fungsi polinomial

Perhatikan fungsi-fungsi berikut:

- $f(x) = ax + b$
- $f(x) = ax^2 + bx + c$
- $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Pola apa yang Anda amati dari fungsi-fungsi tersebut?

1. Fungsi polinomial

Perhatikan fungsi-fungsi berikut:

- $f(x) = ax + b$
- $f(x) = ax^2 + bx + c$
- $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Pola apa yang Anda amati dari fungsi-fungsi tersebut?

Definisi fungsi polinomial

Sebuah fungsi polinomial memiliki bentuk:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

2. Fungsi modulo

Misalkan $a \in \mathbb{Z}$ dan $m \in \mathbb{Z}^+$. Fungsi a modulo m dinotasikan sebagai:

$$a \mod m$$

yaitu fungsi yang memberikan sisa pembagian dari a bila dibagi dengan m.

Jadi,

$$a \mod m \equiv r$$

berarti $a = mq + r$ dengan $0 \leq r \leq m$.

Contoh fungsi modulo

- $13 \mod 5 \equiv$ ...
- $30 \mod 5 \equiv$ ...
- $13 \mod 20 \equiv$ ...
- $0 \mod 5 \equiv$ ...
- $-13 \mod 5 \equiv$ ...
- ...

3. Fungsi faktorial

Misalkan $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$. Fungsi faktorial dari n didefinisikan sebagai:

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n, & n > 0 \end{cases}$$

Example

- $0! = ?$
- $1! = ?$
- $2! = ?$
- $3! = ?$

4. Fungsi eksponensial

Misal $a \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{Z}^+$. Fungsi eksponensial didefinisikan sebagai:

$$a^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ times}}, & n > 0 \end{cases}$$

Untuk $n < 0$, didefinisikan:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Sifat-sifat fungsi eksponensial

1. $a^m \times a^n = ...$
2. $a^m / a^n = ...$
3. ...
4. ...

5. Fungsi logaritmik

Fungsi logaritmik merupakan invers dari fungsi eksponensial.

Diberikan $x = a^y$, bagaimana y dapat dinyatakan sebagai fungsi dari x?

$$x = a^y \Leftrightarrow y = {}^a\log x$$

Sifat-sifat fungsi logaritmik

1. ${}^a\log x + {}^a\log y$ ...
2. ${}^a\log x - {}^a\log y$ ...
3. ...
4. ...

6. Fungsi *floor* dan *ceiling*

Misalkan $x \in \mathbb{R}$, maka terdapat dua bilangan bulat z_1 dan z_2 yang "mengapit" x. Dengan kata lain:

$$z_1 \leq x \leq z_2$$

Dalam hal ini, dapat dilakukan pembulatan bilangan bulat **terdekat**, **ke atas**, atau **ke bawah**.

- Fungsi floor menyatakan nilai bilangan bulat **terbesar** yang **kurang dari atau sama dengan** x.

  Dilambangkan dengan $\lfloor x \rfloor$.

- Fungsi ceiling menyatakan nilai bilangan bulat **terkecil** yang **lebih dari atau sama dengan** x.

  Dilambangkan dengan $\lceil x \rceil$.

Contoh:

$$\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0, \lceil \frac{1}{2} \rceil = 1, \lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = -1, \lceil -\frac{1}{2} \rceil = 0, \lfloor 3.1 \rfloor = 3, \lceil 3.1 \rceil = 4, \lfloor 7 \rfloor = 7, \lceil 7 \rceil = 7$$

7. Fungsi rekursif

Tinjau fungsi berikut.

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n, & n > 0 \end{cases}$$

- Menggunakan definisi tersebut, hitunglah nilai dari $2!, 3!, 4!, \ldots$.
- Pola apa yang dapat diamati dari proses yang dilakukan?
- Bagaimana keterkaitan antara $n!$ dan $(n-1)!$?

Relasi rekurens

Relasi rekurens untuk barisan $\{a_n\}$ adalah persamaan yang menyatakan a_n dalam satu (atau lebih) suku-suku sebelumnya, yaitu $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Pada contoh sebelumnya, kita dapat menyatakan fungsi faktorial sebagai:

$$\begin{aligned} n! &= (n-1)!\ n \\ \Leftrightarrow\ f(n) &= f(n-1) \times n \end{aligned}$$

Sehingga fungsi rekursif-nya adalah:

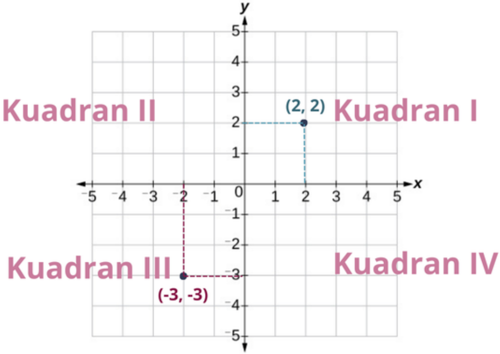
$$\begin{cases} f(1) & = 1 \\ f(n) & = f(n-1) \times n \end{cases}$$

Bagian 1.3: Sistem koordinat Kartesisus

Daftar isi:

1. Sistem koordinat Kartesisus
2. Polinom (suku banyak)
3. Persamaan garis lurus
4. Fungsi kuadrat
5. Persamaan lingkaran
6. Persamaan elips
7. Persamaan hiperbola

1. Sistem koordinat Kartesisus



- Sumbu-x (*absis*)
- Sumbu-y (*ordinat*)

Remark. Sistem koordinat ini dapat diperluas menjadi n sumbu, $n \geq 3$.

2. Polinom (suku banyak)

Bentuk umum:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

- $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ adalah *koefesien*
- x adalah *variabel*
- n adalah *derajat* polinom

Akar dari polinom $p(x)$ adalah semua nilai x yang memenuhi kesamaan:

$$p(x) = 0$$

.

Menentukan akar polinom

- Polinom *linier* (derajat satu):

$$p(x) = ax + b,\ \ a \neq 0 \ \text{ akarnya } \ x = -\frac{b}{a}$$

- Polinom *kuadrat* (derajat dua):

$$p(x) = ax^2 + bx + c,\ \ a \neq 0$$

akarnya $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ dan $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ dengan $D = b^2 - 4ac$ disebut *diskriminan*.

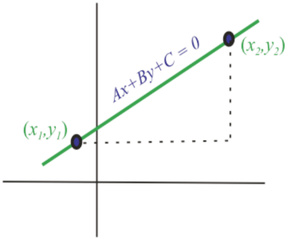
Dalam hal ini, terdapat tiga kemungkinan nilai diskriminan:

  - $D > 0$, dua akar riil berbeda $(x_1 \neq x_2)$
  - $D = 0$, dua akar riil kembar $(x_1 = x_2)$
  - $D < 0$, tidak ada akar riil

Koefesien a menentukan *kecekungan grafiknya*.

  - $a > 0$: grafik cekung ke atas
  - $a < 0$: grafik cekung ke bawah

3. Persamaan garis lurus

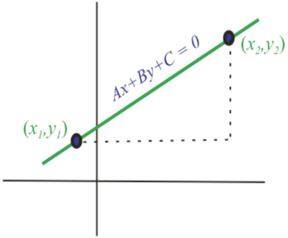


Bentuk umum: $Ax + By + C = 0$ dimana A dan B tidak keduanya nol.

Berikan analisis apa yang terjadi jika:

- $A = 0$
- $B = 0$
- $A, B \neq 0$

3. Persamaan garis lurus

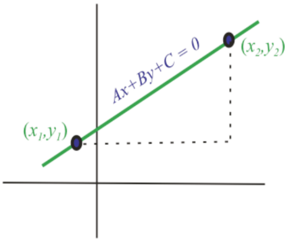


Bentuk umum: $Ax + By + C = 0$ dimana A dan B tidak keduanya nol.

Berikan analisis apa yang terjadi jika:

- $A = 0 \;\rightarrow\;$ persamaan berbentuk $y = -\frac{C}{B}$, grafiknya sejajar sb-x
- $B = 0 \;\rightarrow\;$ persamaan berbentuk $x = -\frac{C}{A}$, grafiknya sejajar sb-y
- $A, B \neq 0 \;\rightarrow\; Ax + By + C = 0 \;\Leftrightarrow\; y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

3. Persamaan garis lurus



Saat $A, B \neq 0$, maka:

$$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Jika $m = -\frac{A}{B}$ dan $c = -\frac{C}{B}$, maka persamaan garis lurus dapat dituliskan sebagai:

$$y = mx + c$$

- m disebut *gradien* atau *kemiringan* garis lurus

Menggambar grafik dari persamaan garis lurus

Latihan: Gambarlah grafik fungsi berikut:

1. $2x + 3y = 12$
2. $3x - y = 6$

Apa perbedaan kedua garis lurus tersebut?

Dapatkah Anda menjelaskan hubungannya?

____

____

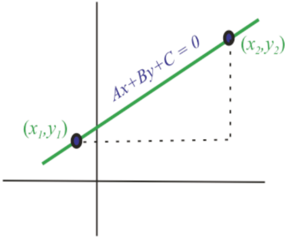
____

Jelaskan tahapan menentukan persamaan garis lurus.

1. ...
2. ...

Bagaimana menentukan persamaan garis lurus

Diketahui sebuah garis lurus melalui dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2).



Bagaimanakah persamaan garis tersebut?

4. Menggambar grafik fungsi kuadrat (parabola)

Latihan: Gambarlah grafik fungsi berikut.

1. $f(x) = x^2 + x - 1$
2. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
3. $f(x) = x^2 + 1$
4. $f(x) = -x^2 - 1$

Bagaimana langkah-langkah menggambar fungsi kuadrat?

1. ...
2. ...

Solusi latihan menggambar grafik

Latihan

Bagaimana interpretasi geometris dari fungsi polinom ketika:

- $D > 0$
- $D = 0$
- $D < 0$

Apa yang dapat Anda amati jika:

- $D < 0$ dan $a > 0$
- $D < 0$ dan $a < 0$

Bagaimana menyelesaikan persamaan polinom derajat $n > 2$?

Theorem

Setiap polinom derajat $n > 2$ dapat difaktorkan menjadi faktor-faktor linier atau kuadrat definit (i.e., $D < 0$).

Contoh:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^6 - 1 \\ &= (x^3 - 1)(x^3 + 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

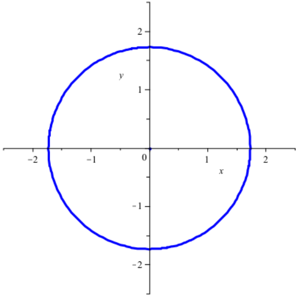
Menurut Anda, dapatkah sebuah fungsi polinom berderajat $n > 2$ digambarkan pada sebuah sistem koordinat Kartesius?

5. Persamaan lingkaran

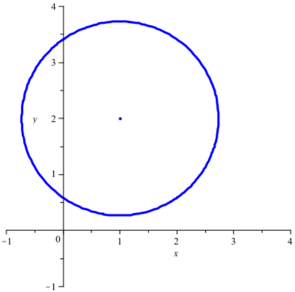
Lingkaran adalah himpunan titik-titik yang jaraknya sama terhadap titik tertentu (yang disebut *pusat lingkaran*).

Lingkaran berpusat di $(0, 0)$ dengan *jari-jari* r $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$

Lingkaran berpusat di (p, q) dengan *jari-jari* r $\boxed{(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2}$



lingkaran $x^2 + y^2 = 3$



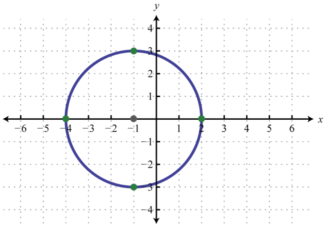
lingkaran $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$

Latihan

1. Tentukan *titik pusat* dan *jari-jari* lingkaran:

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y - 20$$

2. Tentukan persamaan lingkaran berikut.



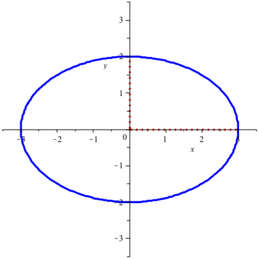
6. Persamaan elips

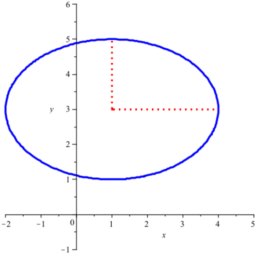
Bentuk umum elips dengan *titik pusat* $(0, 0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Jika pusatnya adalah (p, q), maka persamaannya:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$





Latihan

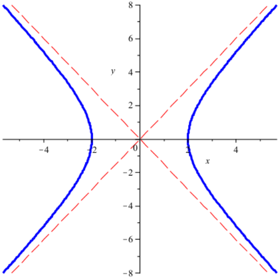
Gambarkan elips berikut

$$4x^2 - 24x + y^2 - 4y + 39 = 0$$

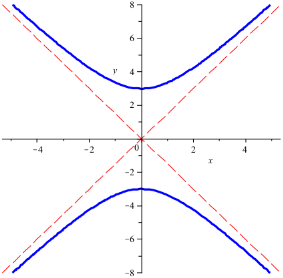
7. Persamaan hiperbola

Bentuk umum:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{atau} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$



$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

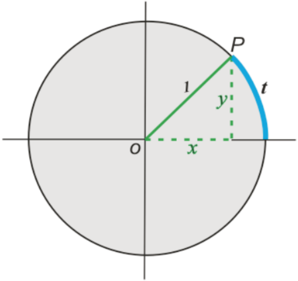
Remark. Garis putus-putus mempunyai persamaan: $2y = 3x$ dan merupakan *asimtot* terhadap hiperbola tersebut.

Latihan

Jelaskan perbedaan persamaan *parabola* dan *hiperbola*.

Bagian 1.4: Trigonometri

Konsep trigonometri



Koordinat titik P adalah $P = (x, y)$.
Sudut t-positif dihitung berdasarkan arah yang berlawanan dengan jarum jam dengan satuan *radian* ($1^o = \frac{1}{180}\pi$rad).

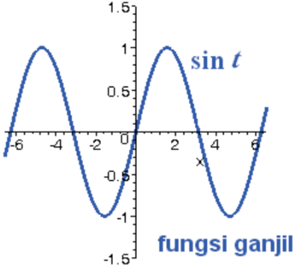
Definisi:

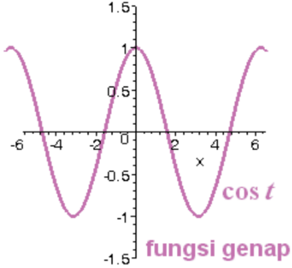
$$f(t) = \sin(t) = y \quad \text{dan} \quad g(t) = \cos(t) = x$$

Fungsi *sinus* dan *cosinus*

Remark. Sudut t dan $t + 2\pi$ menentukan posisi titik P yang sama.

Fungsi *sin* dan *cos* dikatakan *periodik* dengan *periode* 2π.

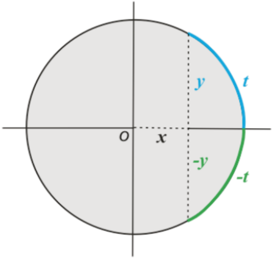




Latihan

Jelaskan mengapa sifat berikut berlaku.

- $\sin(-t) = -\sin(t)$
- $\cos(-t) = -\cos(t)$
- $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$



Jawab:

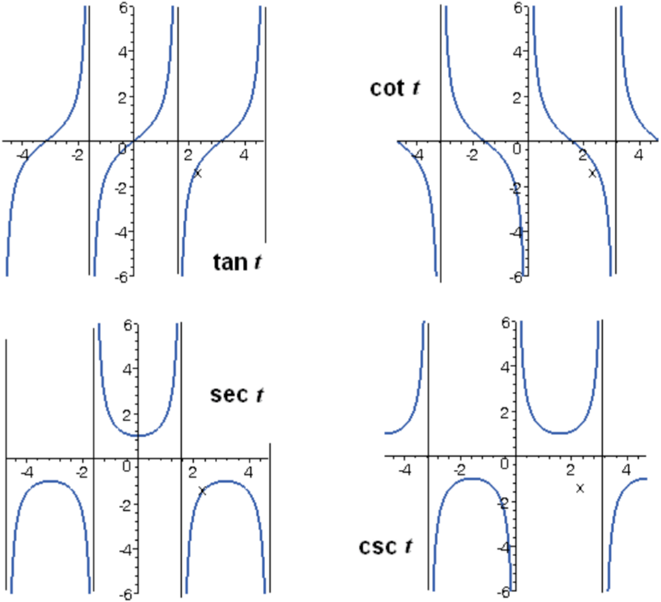
Fungsi trigonometri lainnya

- $f(x) = \tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$
- $f(x) = \cot(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$
- $f(x) = \sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}$
- $f(x) = \csc(t) = \frac{1}{\sin(t)}$

- $D_f = \{x | x \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $D_f = ...$
- $D_f = ...$
- $D_f = ...$

- $R_f = \mathbb{R}$
- $R_f = ...$
- $R_f = ...$
- $R_f = ...$

Apakah fungsi berikut *periodik*?



Sifat-sifat fungsi trigonometri

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \quad 1 + \tan^2(x) = \sec^2(x), \quad 1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$
- $\sin(x) = \sin(x)$ dan $\cos(x) = \cos(x)$
- $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ dan $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$
- $\sin(x) = \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Bagian 1.5: Matriks

Definisi MATRIKS

Sebuah matriks A adalah sebuah array berbentuk persegi panjang, dan berisikan skalar:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Baris dari matriks A adalah daftar m elemen yang tersusun horizontal:

$$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}),\ (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}),\ \ldots,\ (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$$

Kolom dari matriks A adalah daftar n elemen yang tersusun vertikal:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m3} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Note: Jadi, matriks terdiri dari sekumpulan vektor.

1. Matriks persegi

Matriks persegi adalah matriks dengan jumlah baris dan kolom yang sama.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Example

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Diagonal and Trace

Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks persegi dengan order n. Diagonal atau diagonal utama dari A terdiri dari elemen dengan subskrip yang sama, yaitu:

$$a_{11},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{nn}$$

Trace dari A, dilambangkan dengan $\mathrm{tr}(A)$ adalah jumlah elemen diagonal dari A.

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Theorem (Properties of trace)

- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(kA) = k\,tr(A)$
- $tr(A^T) = tr(A)$
- $tr(AB) = tr(BA)$ *(ingatlah bahwa tidak selalu $AB \neq BA$)*

2. Matriks identitas, matriks skalar

The identity or unit matrix, denoted by I_n (or simply I) is the square matrix $n \times n$, with 1's on the diagonal, and 0's elsewhere.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

I has a similar role as the scalar 1 for $\mathbb{R}$.

Sifat penting: Ketika terdefinisi dengan baik,

$$IA = A$$

Untuk beberapa skalar $k \in \mathbb{R}$, matriks kI disebut matriks skalar yang sesuai dengan skalar k.

3. Matriks diagonal

Matriks $D = [d_{ij}]$ adalah matriks diagonal jika entri non-diagonalnya semuanya nol.

$$D = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$$

dimana beberapa dari d_{ii} atau semua d_{ii} mungkin nol.

Example

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -5 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & 9 \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, matriks identitas dan matriks skalar juga merupakan matriks diagonal.

4. Matriks *segitiga atas* dan *segitiga bawah*

Matriks persegi $A = [a_{ij}]$ adalah segitiga atas (*upper-triangular*), jika semua entri di bawah diagonal utama sama dengan 0.

Matriks segitiga bawah (*lower-triangular*) adalah matriks persegi yang entri-entri di atas diagonal utama semuanya nol.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga atas dan segitiga bawah

Theorem

Jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah $n \times n$ matriks segitiga. Maka:

$$A + B, \quad kA, \quad AB$$

adalah matriks segitiga dengan elemen diagonalnya yaitu:

$$(a_{11} + b_{11}, \ \ldots, \ a_{nn} + b_{nn}), \quad (ka_{11}, \ \ldots, \ ka_{nn}), \quad (a_{11}b_{11}, \ \ldots, \ a_{nn}b_{nn})$$

5. Matriks simetris

Suatu matriks A adalah simetris jika $A^T = A$, yaitu $a_{ij} = a_{ji}$ untuk setiap $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Itu skew-symmetric jika $A^T = -A$.

Example

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

A adalah matriks simetris, dan B adalah matriks simetris miring.

Dapatkah Anda menemukan contoh lain? Temukan contoh matriks yang tidak simetris dan tidak simetris miring.

6. Matriks normal

Sebuah matriks A adalah matriks normal jika $AA^T = A^T A$.

Example

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Maka:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}$$

Karena $AA^T = A^T A$, matriks A adalah normal.

7. Matriks blok

Dengan menggunakan sistem garis horizontal dan vertikal (putus-putus), matriks A dapat dipartisi menjadi submatriks yang disebut blok (atau sel) dari A.

Example

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & -2 \\ \hline 3 & 1 & 4 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & -3 & 1 & 8 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 9 \\ \hline 4 & 6 & -3 & 1 & 8 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & -2 \\ \hline 3 & 1 & 4 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & -3 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Operasi pada matriks blok

Misalkan $A = [A_{ij}]$ dan $B = [B_{ij}]$ adalah matriks blok dengan jumlah blok baris dan kolom yang sama, dan misalkan blok yang bersesuaian memiliki ukuran yang sama.

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1n} + B_{1n} \\ A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1n} + B_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \cdots & A_{mn} + B_{mn} \end{bmatrix}$$

dan

$$kA = \begin{bmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1n} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ kA_{m1} & kA_{m2} & \cdots & kA_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks blok persegi

Matriks blok M disebut matriks blok persegi jika:

1. M adalah matriks persegi.
2. Blok-bloknya membentuk matriks persegi.
3. Blok diagonalnya juga matriks persegi.

Example

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 3 & 5 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

Manakah dari matriks di atas yang merupakan matriks blok persegi?

Matriks blok diagonal

Matriks blok diagonal adalah matriks blok persegi $M = [A_{ij}]$ sedemikian sehingga blok-blok non-diagonalnya adalah matriks nol.

Example

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Matriks blok diagonal sering dilambangkan sebagai $M = \mathrm{diag}(A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{rr})$

Operasi matriks

Kita akan membahas:

1. Perkalian skalar
2. Penambahan matriks
3. Perkalian matriks
4. Transpose matriks
5. Perpangkatan matriks
6. Polinomial dari matriks

1. Perkalian matriks dengan skalar

Hasil perkalian dari matriks $A = [a_{ij}]$ dengan skalar $k \in \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai:

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Lebih lanjut, $-A = (-1)A$.

2. Penjumlahan matriks

Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks dengan ukuran yang sama, yaitu ukuran $m \times n$. Jumlah dari A dan B didefinisikan sebagai:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Lebih lanjut, $A - B = A + (-B)$.

Sifat-sifat matriks pada penjumlahan dan perkalian skalar

Theorem

Misalkan A, B, dan C merupakan matriks dengan ukuran yang sama, dan $k, k' \in \mathbb{R}$. Maka:

- $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(asosiatif)*
- $A + B = B + A$ *(komutatif)*
- $A + 0 = A$ *(0 adalah elemen identitas thd penjumlahan)*
- $A + (-A) = 0$ *(matriks invers thd penjumlahan)*
- $k(A + B) = kA + kB$ *(distributif)*
- $(k + k')A = kA + k'A$ *(distributif thd skalar)*
- $(kk')A = k(k'A)$ *(asosiatif thd scalar)*
- $1 \cdot A = A$ *(1 adalah elemen identitas thd perkalian skalar)*

Note: Oleh karena itu, jumlah $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ dapat dihitung dalam urutan apa pun, dan tidak memerlukan tanda kurung.

Contoh persoalan

Diketahui matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Sederhanakan ekspresi matriks berikut.

- $A + B$
- $B - C$
- $-3A + 2B$
- $5A + 2B - 3C$
- $3(A - C) + B$
- $A - A$

3. Perkalian matriks

Misalkan $A = [a_i]$ adalah matriks baris dan $B = [b_i]$ adalah matriks kolom. Maka $A \times B$ didefinisikan sebagai:

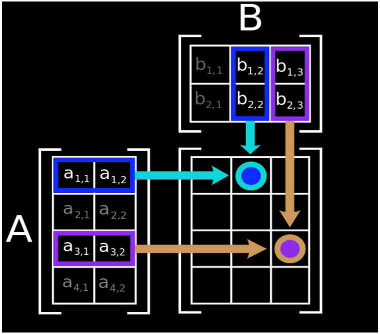
$$AB = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Catatan: hasil kali A dan B adalah skalar.

Example

$$[7, -4, 5] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 7(3) + (-4)(2) + 5(-1) = 21 - 8 - 5 = 8$$

Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ masing-masing adalah matriks dengan ukuran $m \times p$ dan $p \times n$. Maka hasil kali A dan B adalah matriks AB dengan ukuran $m \times n$.



Contoh persoalan

Hitunglah nilai AB dimana $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$.

Kalikan setiap baris A dengan setiap kolom dari B.

Karena A berukuran 2×2 dan B berukuran 2×3, maka AB berukuran 2×3.

$$AB = \begin{bmatrix} 2+15 & 0-6 & -4+18 \\ 4-5 & 0+2 & -8-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -6 & 14 \\ -1 & 2 & -14 \end{bmatrix}$$

Hubungan antara penjumlahan matriks dan perkalian matriks

Theorem

Misalkan A, B, dan C adalah matriks. Jika penjumlahan dan perkalian matriks terdefinisi dengan jelas, maka:

- $(AB)C = A(BC)$ *(asosiatif)*
- $A(B + C) = AB + AC$ *(distributif kiri)*
- $(B + C)A = BA + CA$ *(distributif kanan)*
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ *dimana* $k \in \mathbb{R}$
- $0A = 0$ *dan* $A0 = 0$, *dimana* 0 *adalah matriks nol*

4. Transpos matriks

Transpos dari sebuah matriks A, dilambangkan dengan A^T, adalah matriks yang diperoleh dengan menuliskan kolom-kolom A, secara berurutan, sebagai baris.

Jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, maka $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Catatan: Jika A memiliki ukuran $m \times n$, maka A^T memiliki ukuran $n \times m$.

Example

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Sifat operasi pada transpose matriks

Theorem

Jika A dan B adalah matriks sedemikian sehingga operasi berikut terdefinisi dengan baik (well-defined), maka:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(A - B)^T = A^T - B^T$
4. $(kA)^T = kA^T$
5. $(AB)^T = B^T A^T$

5. Perpangkatan matriks, Polinomial matriks

Jika A memiliki ukuran $m \times n$, maka A^T memiliki ukuran $n \times m$. Misalkan A adalah matriks persegi dengan order n atas $\mathbb{R}$ (atau atas lapangan lain). Perpangkatan dari A didefinisikan sebagai:

$$A^2 = AA, \quad A^3 = A^2A, \quad \ldots, \quad A^{n+1} = A^nA, \quad \ldots, \quad \text{dan} \quad A^0 = 1$$

Kita juga dapat mendefinisikan polinomial dalam matriks A. Untuk polinomial apa pun:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad \text{dimana } a_i \in \mathbb{R},$$

Polinomial $f(A)$ didefinisikan sebagai:

$$f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$$

Catatan: Jika $f(A) = 0$ (matriks nol), maka A disebut *pembuat nol (zero)* atau *akar (root)* dari $f(x)$.

Contoh persoalan

Misal $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$. Maka:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}, \quad \text{dan}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 38 \\ 57 & -106 \end{bmatrix}$$

Misal $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$, maka:

$$f(A) = 2 \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{bmatrix}$$

Determinan

1. Determinan dari matriks 2×2

Diberikan sebuah matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

Di sekolah menengah, Anda mungkin telah mempelajari bahwa determinan dari matriks (ukuran 2×2) didefinisikan sebagai

$$a_1 b_2 - a_2 b_1$$

dan dinotasikan dengan:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Contoh motivasi

Perhatikan lagi sistem persamaan linier dalam dua variabel:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

- Sistem memiliki tepat satu solusi ketika $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$
- Sistem tidak memiliki solusi atau memiliki banyak solusi ketika $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$

Contoh motivasi

Perhatikan lagi sistem persamaan linier dalam dua variabel:

$$
\begin{aligned}
a_1x + b_1y &= c_1 \\
a_2x + b_2y &= c_2
\end{aligned}
$$

- Sistem memiliki tepat <u>satu solusi</u> ketika $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$
- Sistem <u>tidak memiliki solusi atau memiliki banyak solusi</u> ketika $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

Matriks koefisien $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ memiliki determinan $= a_1b_2 - a_2b_1$.

Catatan. Dengan demikian, determinan dari matriks koefisien menentukan jumlah solusi dari sistem yang diberikan. Sistem memiliki solusi unik jika $D \neq 0$.

Penerapan determinan pada sistem persamaan linear

Menyelesaikan SPL dengan metode eliminasi:

$$
\begin{aligned}
a_1 b_2 x + b_1 b_2 y &= b_2 c_1 \\
a_2 b_1 x + b_1 b_2 y &= b_1 c_2 \\
\hline
(a_1 b_2 - a_2 b_1) x &= b_2 c_1 - b_1 c_2 \\
x &= \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}
\end{aligned}
$$

Sehingga:

$$
b_2 c_1 - b_1 c_2 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = N_x \quad \text{dan} \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D
$$

Dengan demikian, $x = \frac{N_x}{D}$

Penerapan determinan pada sistem persamaan linear

Nilai y dapat ditentukan dengan cara serupa:

$$a_1 a_2 x + a_2 b_1 y = a_2 c_1$$
$$a_1 a_2 x + a_1 b_2 y = a_1 c_2$$

$$(a_2 b_1 - a_1 b_2) y = a_2 c_1 - a_1 c_2$$
$$x = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Sehingga:

$$a_1 c_2 - a_2 c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = N_y \quad \text{dan} \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D$$

Jadi, $y = \frac{N_y}{D}$

Contoh penyelesaian SPL dengan determinan

Selesaikan sistem berikut menggunakan determinan:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -10 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$$

Solusi:

$$N_x = \begin{vmatrix} -10 & -4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -20 - (-8) = -12$$

$$N_y = \begin{vmatrix} 3 & -10 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 10 = -4$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$$

Jadi, $x = \frac{-12}{2} = -6$ dan $y = \frac{-4}{2} = -2$.

Kesimpulan

Diberikan:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned}$$

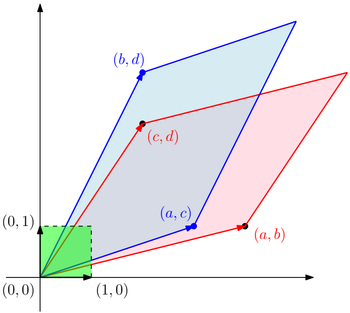
dengan matriks koefisien $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ memiliki determinan tak-nol (artinya, SPL memiliki solusi tunggal).

Solusi SPL adalah:

$$x = \frac{N_x}{D} \quad \text{dan} \quad y = \frac{N_y}{D}$$

dimana $N_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $N_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, dan $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Interpretasi geometris



Matriks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dapat dilihat sebagai "pengaturan" dari:

- vektor baris: $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$
- atau, vektor kolom: $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$

Matriks mendefinisikan apa yang disebut *transformasi linier* dari persegi satuan (digambar hijau) yang dibentuk oleh *vektor basis* $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, sehubungan dengan:

- vektor baris, ditunjukkan oleh jajar genjang merah; atau
- vektor kolom, ditunjukkan oleh jajar genjang biru

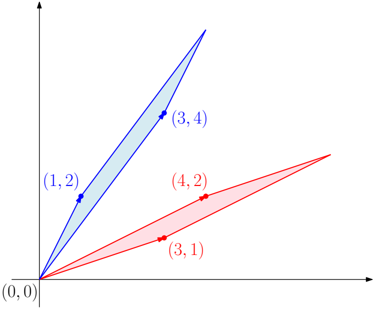
Kedua jajar genjang memiliki luas yang sama.

Contoh

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Gambarlah dua jajar genjang yang mendefinisikan transformasi persegi satuan terhadap masing-masing vektor baris dan vektor kolom.

Solusi:



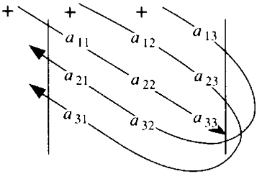
2. Determinan matriks ukuran 3×3

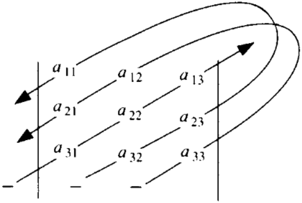
Diberikan matriks:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks di atas didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} \det(A) = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$





Bentuk alternatif untuk determinan matriks orde-3

Determinan dari matriks di atas didefinisikan sebagai:

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{23} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Formula ini dapat digambarkan sebagai berikut:

$$
a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

Contoh

Tentukan determinan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

Solusi:

- *Dengan menggunakan diagram*

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3(5)(4) + 2(-1)(2) + (1)(-4)(-3) - 1(5)(2) - 2(-4)4 - 3(-1)(-3) \\ &= 60 - 4 + 12 - 10 + 32 - 9 \;=\; 81 \end{aligned}$$

- *Dengan menggunakan bentuk alternatif*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} &= 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 3(20 - 3) - 2(-16 + 2) + 1(12 - 10) = 51 + 28 + 2 = 81 \end{aligned}$$

Penerapan pada sistem persamaan linear

Diketahui sistem persamaan linier berikut:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{cases}$$

Kita dapat melakukan perhitungan serupa seperti pada kasus matriks (2×2), untuk menemukan solusi sistem.

Matriks koefesien dari SPL tersebut adalah: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

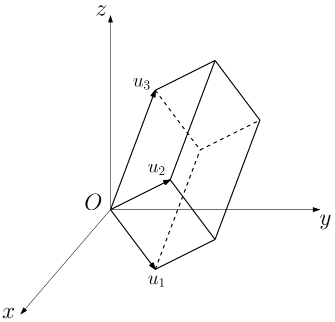
Penerapan pada sistem persamaan linear

SPL memiliki solusi tunggal hanya jika $D = \det(A) \neq 0$.
Solusinya adalah:

$$x = \frac{N_x}{D}, \quad y = \frac{N_y}{D}, \quad z = \frac{N_z}{D}$$

dimana N_x, N_y, dan N_z diperoleh dengan mengganti kolom ke-1, ke-2, dan ke-3 dari A dengan vektor konstanta $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

Interpretasi geometris



Dalam $\mathbb{R}^3$, vektor u_1, u_2, dan u_3 menentukan paralelepiped,

yang merupakan hasil transformasi kubus satuan menggunakan vektor $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Catatan.
Misal $u_1, u_2, \ldots, u_n$ adalah vektor di $\mathbb{R}^n$. Maka persamaan paralelepiped:

$$S = \{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n \ : \ 0 \leq a_i \leq 1 \text{ for } i = 1, \ldots, n\}$$

$V(S) =$ nilai mutlak $\det(A)$

Latihan: membuat program komputer

- Buatlah program komputer untuk mengalikan dua matriks A berukuran $m \times p$ dan B berukuran $p \times n$, dimana $m, n, p \in \{1, 2, 3\}$.
- Gunakan program pada soal sebelumnya sebagai subrutin untuk membuat program komputer yang menghitung perpangkatan matriks persegi A berukuran 3×3.
- Buatlah sebuah program komputer untuk menghitung determinan matriks berukuran 3×3.

Bagian 1.6: Transformasi

Transformasi yang pernah dipelajari di SMA

- Pencerminan
- Rotasi
- Dilasi

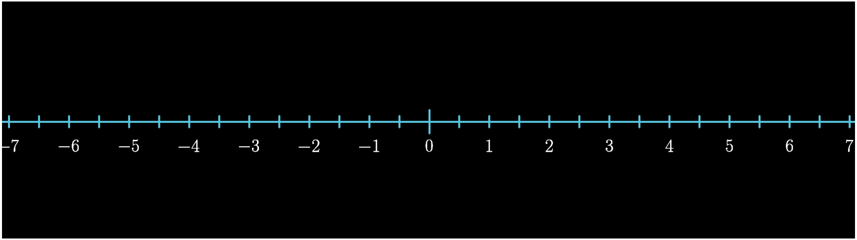
Konversi dari ^{o} ke rad

- $180^o = 1\pi$ rad
- $1^o = \frac{\pi}{180}$ rad

Ilustrasi

Ruang vektor:

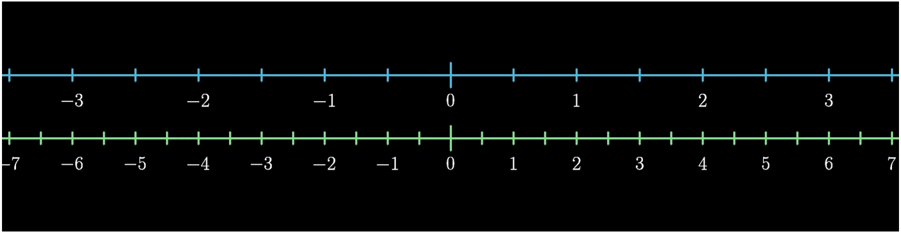
Ruang vektor satu dimensi:



Ilustrasi

Ruang vektor:

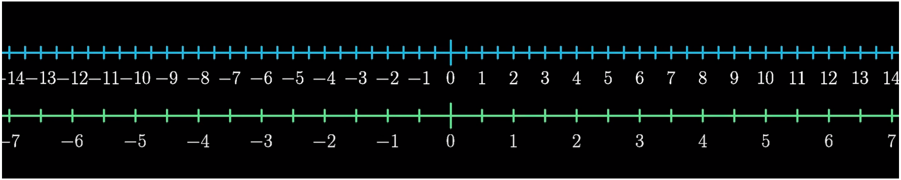
Jika setiap bilangan pada garis tersebut dikalikan 2:



Ilustrasi

Ruang vektor:

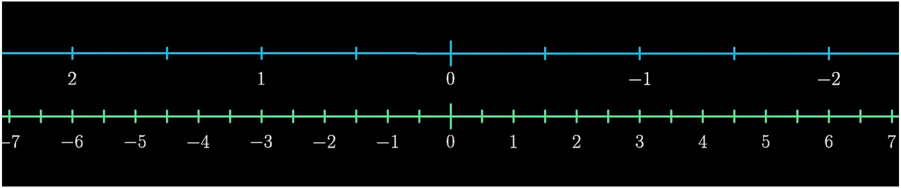
Jika setiap bilangan pada garis tersebut dikalikan $1/2$:



Ilustrasi

Ruang vektor:

Jika setiap bilangan pada garis tersebut dikalikan -3:



Ilustrasi

Ruang vektor:

Tansformasi linier pada ruang berdimensi 2

https://www.youtube.com/watch?v=2xKaXDHDGsA

Transformasi yang tidak linier pada ruang berdimensi 2

https://www.youtube.com/watch?v=x1dGfxBdDlM

https://www.youtube.com/watch?v=MgWkNwczVb0

Definisi formal

Definition

Jika f adalah fungsi dengan domain $\mathbb{R}^n$ dan codomain $\mathbb{R}^m$, maka kita katakan bahwa f adalah transformation dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$, atau f maps dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$.

$$f \ : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Jika $m = n$, transformasi sering disebut operator di $\mathbb{R}^n$.

Transformasi muncul dari sistem linier

Diberikan sistem linier:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
w_1 & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\
w_2 & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
w_m & = & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n
\end{array}
$$

yang dapat ditulis dalam notasi matriks $\mathbf{w} = A\mathbf{x}$:

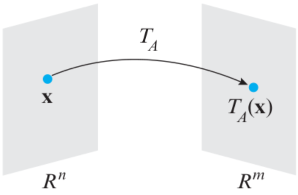
$$
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

Ini dapat dilihat sebagai transformasi yang memetakan vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ke dalam vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ dengan mengalikan $\mathbf{x}$ di sebelah kiri dengan A.

Transformasi matriks

Matriks yang mengubah vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ menjadi vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ disebut matrix transformation (atau matrix operator ketika $m = n$), dan dilambangkan dengan:

$$T \; : \; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

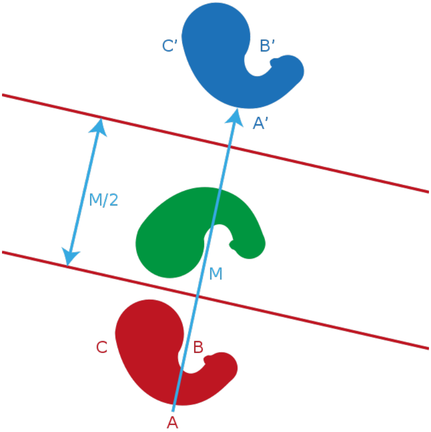


$T_A : R^n \to R^m$

Notasi lain yang sering digunakan adalah:

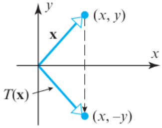
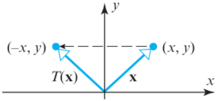
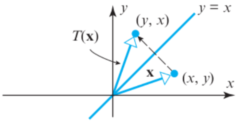
- $\mathbf{w} = T_A(\mathbf{x})$, yang disebut perkalian dengan A; atau
- $\mathbf{x} \xrightarrow{T_A} \mathbf{w}$, yang dibaca sebagai T_A memetakan $\mathbf{x}$ menjadi $\mathbf{w}$.

1. Refleksi (pencerminan)

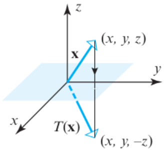
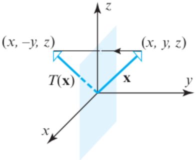
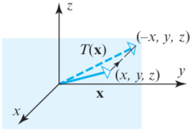


Operator refleksi pada $\mathbb{R}^2$

Operator refleksi are operators on $\mathbb{R}^2$ (or $\mathbb{R}^3$) that maps each point into its symmetric image about a fixed line or a fixed plane that contains the origin.

Operator	**Illustration**	**Images of $\mathbf{e}_1$ and $\mathbf{e}_2$**	**Standard Matrix**
Reflection about the x-axis $T(x, y) = (x, -y)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (1, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, -1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflection about the y-axis $T(x, y) = (-x, y)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (-1, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, 1)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflection about the line $y = x$ $T(x, y) = (y, x)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (0, 1)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (1, 0)$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

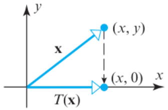
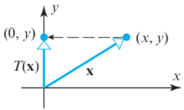
Operator refleksi pada $\mathbb{R}^3$

Operator	**Illustration**	**Images of $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$**	**Standard Matrix**
Reflection about the xy-plane $T(x, y, z) = (x, y, -z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1,0,0) = (1,0,0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0,1,0) = (0,1,0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0,0,1) = (0,0,-1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflection about the xz-plane $T(x, y, z) = (x, -y, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1,0,0) = (1,0,0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0,1,0) = (0,-1,0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0,0,1) = (0,0,1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflection about the yz-plane $T(x, y, z) = (-x, y, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1,0,0) = (-1,0,0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0,1,0) = (0,1,0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0,0,1) = (0,0,1)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

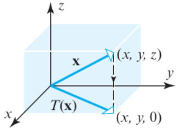
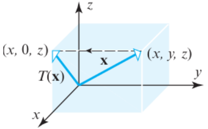
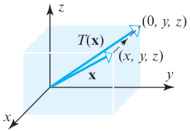
2. Proyeksi

Operator proyeksi di $\mathbb{R}^2$

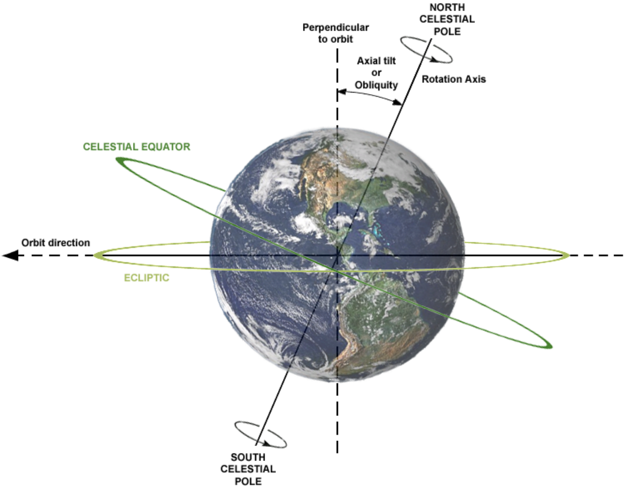
Operator proyeksi atau operator proyeksi ortogonal adalah operator matriks pada $\mathbb{R}^2$ (atau $\mathbb{R}^3$) yang memetakan setiap titik ke dalam proyeksi ortogonalnya ke suatu garis tetap atau bidang melalui titik asal.

Operator	**Illustration**	**Images of $\mathbf{e}_1$ and $\mathbf{e}_2$**	**Standard Matrix**
Orthogonal projection onto the x-axis $T(x, y) = (x, 0)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (1, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Orthogonal projection onto the y-axis $T(x, y) = (0, y)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, 1)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Operator proyeksi pada $\mathbb{R}^3$

Operator	**Illustration**	**Images of $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$**	**Standard Matrix**
Orthogonal projection onto the xy-plane $T(x, y, z) = (x, y, 0)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Orthogonal projection onto the xz-plane $T(x, y, z) = (x, 0, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Orthogonal projection onto the yz-plane $T(x, y, z) = (0, y, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

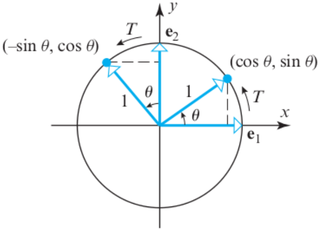
3. Rotasi


NORTH CELESTIAL POLE
Perpendicular to orbit
Axial tilt or Obliquity
Rotation Axis
CELESTIAL EQUATOR
Orbit direction
ECLIPTIC
SOUTH CELESTIAL POLE

Operator rotasi untuk $\mathbb{R}^2$

Operator rotasi adalah operator matriks pada $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$ yang memindahkan titik sepanjang busur lingkaran yang berpusat di asal.

Bagaimana menemukan matriks standar untuk operator rotasi $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yang memindahkan titik berlawanan arah jarum jam terhadap titik asal melalui positif sudut θ ?



$$T(\mathbf{e}_1) = T(1,0) = (\cos\theta, \sin\theta) \text{ and } T(\mathbf{e}_2) = T(0,1) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

Matriks transformasi standar untuk T adalah:

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Operator rotasi untuk $\mathbb{R}^2$ (*lanjutan*)

Matriks:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

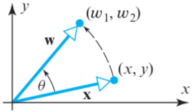
disebut rotation matrix untuk $\mathbb{R}^2$.

Misalkan $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ menjadi gambarnya di bawah rotasi. Kemudian:

$$\mathbf{w} = R_\theta \mathbf{x}$$

with:

$$w_1 = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$w_2 = x\sin\theta + y\cos\theta$$

Operator	Illustration	Rotation Equations	Standard Matrix
Counterclockwise rotation about the origin through an angle θ		$w_1 = x\cos\theta - y\sin\theta$ $w_2 = x\sin\theta + y\cos\theta$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Contoh operator rotasi

Temukan gambar $\mathbf{x} = (1, 1)$ di bawah rotasi $\pi/6$ rad $(= 30^o)$ tentang asalnya.

Solusi:

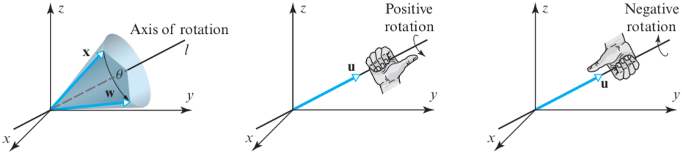
Kita tahu bahwa $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$ dan $\cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dengan rumus sebelumnya:

$$R_{\pi/6}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.37 \\ 1.37 \end{bmatrix}$$

Rotasi di $\mathbb{R}^3$

Rotasi di $\mathbb{R}^3$ umumnya digambarkan sebagai axis of rotation dan vektor satuan **u** sepanjang garis itu.

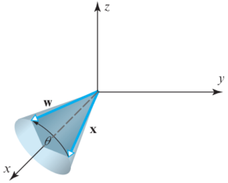
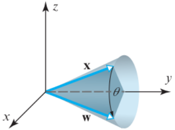
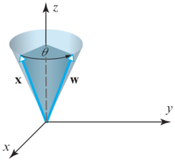


(*a*) Angle of rotation (*b*) Right-hand rule

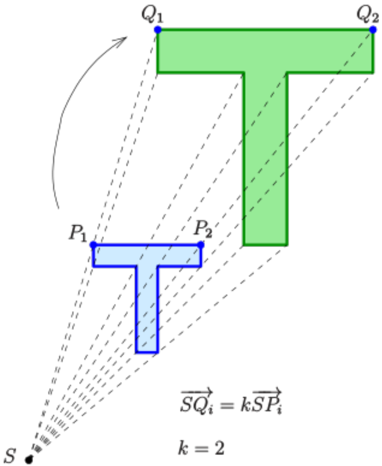
Aturan tangan kanan digunakan untuk menetapkan tanda sudut rotasi.

- Jika sumbu adalah sumbu x, y, atau z, maka ambil vektor satuan masing-masing **i**, **j**, dan **k**.
- Sudut rotasi akan menjadi *positif jika berlawanan arah jarum jam* melihat ke arah asal sepanjang sumbu koordinat positif dan akan menjadi *negatif jika searah jarum jam*.

Rotasi di $\mathbb{R}^3$

Operator	Illustration	Rotation Equations	Standard Matrix
Counterclockwise rotation about the positive x-axis through an angle θ		$w_1 = x$ $w_2 = y\cos\theta - z\sin\theta$ $w_3 = y\sin\theta + z\cos\theta$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
Counterclockwise rotation about the positive y-axis through an angle θ		$w_1 = x\cos\theta + z\sin\theta$ $w_2 = y$ $w_3 = -x\sin\theta + z\cos\theta$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$
Counterclockwise rotation about the positive z-axis through an angle θ		$w_1 = x\cos\theta - y\sin\theta$ $w_2 = x\sin\theta + y\cos\theta$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Dilasi and kontraksi



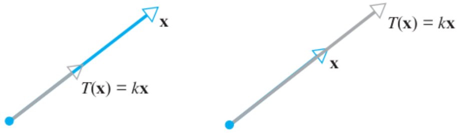
Dilasi & kontraksi

Misalkan $k \in \mathbb{R}, k \geq 0$. Operator:

$$T(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$$

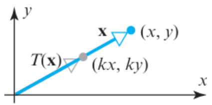
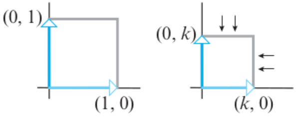
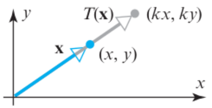
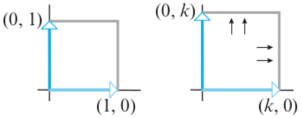
pada $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$ mendefinisikan penambahan atau pengurangan panjang vektor $\mathbf{x}$ dengan faktor k.

- Jika $k > 1$, disebut dilatasi dengan faktor k;
- Jika $0 \leq k \leq 1$, disebut kontraksi dengan faktor k.

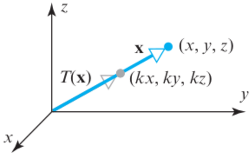
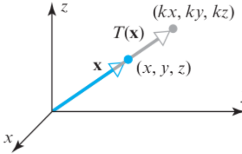


(a) $0 \leq k < 1$ (b) $k > 1$

Dilasi & kontraksi pada $\mathbb{R}^2$

Operator	Illustration $T(x, y) = (kx, ky)$	Effect on the Unit Square	Standard Matrix
Contraction with factor k in R^2 $(0 \leq k < 1)$			$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Dilation with factor k in R^2 $(k > 1)$			

Dilasi & kontraksi pada $\mathbb{R}^3$

Operator	Illustration $T(x, y, z) = (kx, ky, kz)$	Standard Matrix
Contraction with factor k in R^3 $(0 \le k < 1)$		$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$
Dilation with factor k in R^3 $(k > 1)$		

5. Ekspansi and kompresi

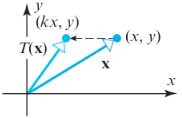
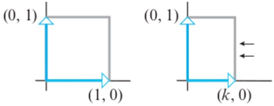
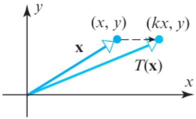
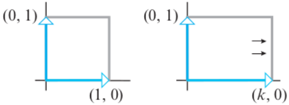
Ekspansi and kompresi

Dalam dilasi atau kontraksi $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$, **semua koordinat** dikalikan dengan faktor non-negatif k.

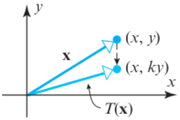
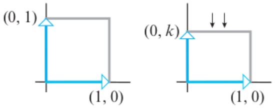
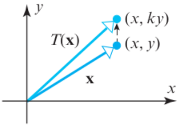
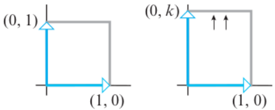
Sekarang bagaimana jika **hanya satu koordinat** dikalikan dengan k ?

- Jika $k > 1$, disebut ekspansi dengan faktor k searah sumbu koordinat (x, y, or z);
- Jika $0 \leq k \leq 1$, disebut kompresi

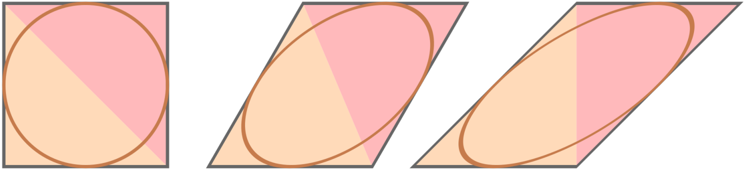
Ekspansi and kompresi in $\mathbb{R}^2$ (in x-direction)

<table>
<tr><th>Operator</th><th>Illustration
$T(x, y) = (kx, y)$</th><th>Effect on the
Unit Square</th><th>Standard
Matrix</th></tr>
<tr><td>Compression in the x-direction with factor k in R^2
$(0 \leq k < 1)$</td><td>
</td><td>
</td><td rowspan="2">$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td>Expansion in the x-direction with factor k in R^2
$(k > 1)$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Ekspansi and kompresi in $\mathbb{R}^2$ (in y-direction)

Operator	Illustration $T(x, y) = (x, ky)$	Effect on the Unit Square	Standard Matrix
Compression in the y-direction with factor k in R^2 $(0 \le k < 1)$			$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Expansion in the y-direction with factor k in R^2 $(k > 1)$			

6. Shear



Shear

Operator matriks berbentuk:

$$T(x, y) = (x + ky, y)$$

menerjemahkan titik (x, y) dalam bidang xy sejajar dengan sumbu x dengan jumlah ky yang sebanding dengan koordinat y dari titik tersebut.

Ini disebut shear in the x-direction dengan faktor k.

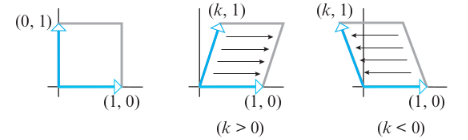
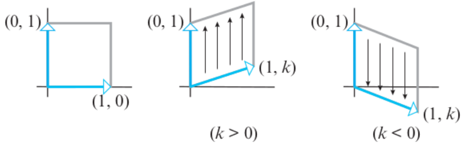
Demikian pula, operator matriks:

$$T(x, y) = (x, y + kx)$$

disebut shear in the y-direction dengan faktor k.

Ketika $k > 0$, maka geseran berada pada arah positif. Ketika $k < 0$, arahnya negatif.

Shear

Operator	Effect on the Unit Square	Standard Matrix
Shear in the x-direction by a factor k in R^2 $T(x, y) = (x + ky, y)$		$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Shear in the y-direction by a factor k in R^2 $T(x, y) = (x, y + kx)$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

Example

Jelaskan operator matriks yang matriks standarnya adalah sebagai berikut:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

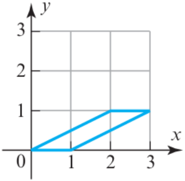
Solusi:

Dari tabel pada slide sebelumnya, kita dapat melihat bahwa:

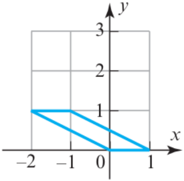
- A_1 sesuai dengan geseran ke arah x dengan faktor 2;
- A_2 sesuai dengan geseran ke arah x dengan faktor -2;
- A_3 sesuai dengan dilatasi dengan faktor 2;
- A_4 sesuai dengan perluasan dalam arah x dengan faktor 2.

Example (*cont.*)

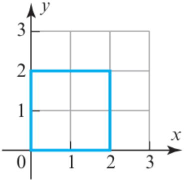
Jelaskan secara geometris hasil transformasi:



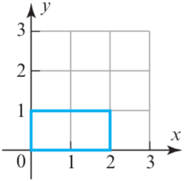
A_1



A_2



A_3



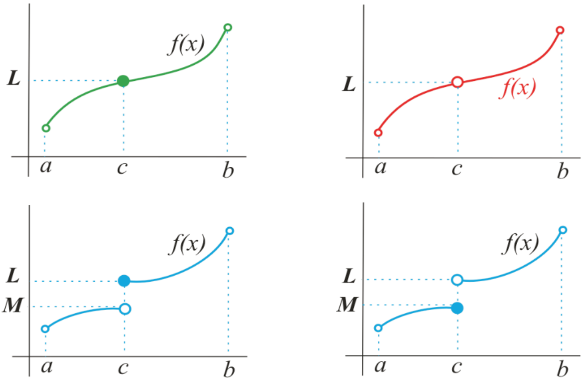
A_4

Bagian 1.7: Limit & turunan

Konsep limit

Misalkan $I = (a, b)$ suatu *interval buka* di $\mathbb{R}$ dan $c \in I$.

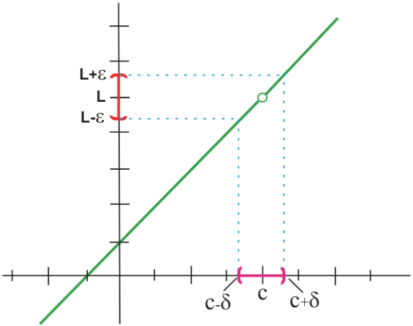
Fungsi $f(x)$ dikatakan *terdefinisi di I kecuali mungkin di c* artinya: $f(x)$ terdefinisi di semua titik pada $I \setminus \{c\}$, dan dapat terdefinisi atau tidak di c.



Berapakah nilai limit $f(x)$ bila x mendekati titik c?

Diberikan fungsi $f(x) = \frac{2x^2-3x-2}{x-2}$, $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

x	$f(x)$
0.00000	1.00000
1.00000	3.00000
1.90000	4.80000
1.95000	4.90000
1.99999	4.99998
$\vdots$	
2.00000	**?**
$\vdots$	
2.00001	5.00002
2.05000	5.10000
2.10000	5.20000
3.00000	7.00000



Perhatikan bahwa:

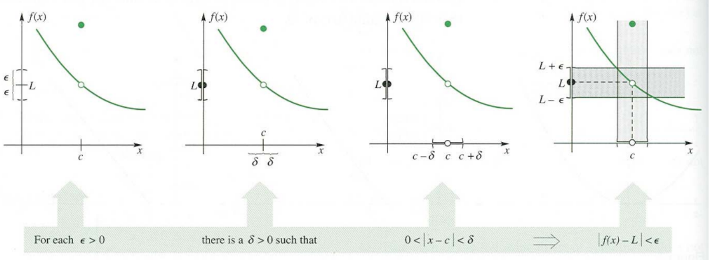
$$f(x) = \frac{2x^2-3x-2}{x-2}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} = \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} = 2x+1$$

Definisi limit

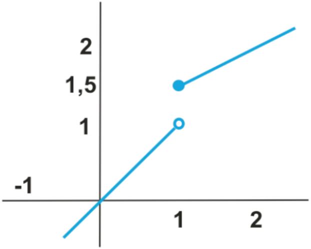
Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada $I = (a, b)$ kecuali mungkin di $c \in I$. Limit dari $f(x)$ untuk x mendekati c adalah L, dinotasikan dengan:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

artinya *untuk setiap $\epsilon > 0$, dapat dicari $\delta > 0$ sehingga $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.*



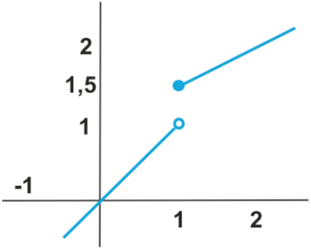
Limit sepihak



- Tentukan δ_1 supaya $x - 1 < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - 1.5| < 1$
- Tentukan δ_2 supaya $x - 1 < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - 1.5| < \frac{3}{4}$
- Tentukan δ_3 supaya $x - 1 < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - 1.5| < \frac{1}{4}$
- Jika $\epsilon > 0$, adakah $\delta > 0$ supaya $x - 1 < \delta \Rightarrow |f(x) - 1.5| < \epsilon$

Karena $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ sehingga implikasi tersebut berlaku, maka "limit dari $f(x)$ untuk x menuju 1 dari kanan bernilai 1.5", dan dinotasikan dengan $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1.5$.

Limit sepihak



- Tentukan δ_1 supaya $1 - x < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - 1.5| < 1$
- Tentukan δ_2 supaya $1 - x < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - 1.5| < \frac{3}{4}$
- Tentukan δ_3 supaya $1 - x < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - 1.5| < \frac{1}{4}$
- Jika $\epsilon > 0$, adakah $\delta > 0$ supaya $1 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - 1.5| < \epsilon$

Ini menunjukkan bahwa "limit kiri dari $f(x)$ untuk x menuju 1 dari kiri bukan 1.5". Apakah limit kirinya ada?

Limit kanan & limit kiri

Limit kanan:

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada $I = (a, b)$ kecuali mungkin di $c \in I$. Limit dari $f(x)$ untuk x mendekati c dari kanan adalah L, dinotasikan dengan:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

artinya *untuk setiap* $\epsilon > 0$*, dapat dicari* $\delta > 0$ *sehingga* $x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Limit kiri:

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada $I = (a, b)$ kecuali mungkin di $c \in I$. Limit dari $f(x)$ untuk x mendekati c dari kiri adalah L, dinotasikan dengan:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

artinya *untuk setiap* $\epsilon > 0$*, dapat dicari* $\delta > 0$ *sehingga* $c - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Sifat-sifat limit

- $\lim_{x\to c} f(x) = L \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to c^+} f(x) = L \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to c^-} f(x) = L$
- $\lim_{x\to c} f(x) = L \;\Rightarrow\; \lim_{x\to c} |f(x)| = |L|$
- $\lim_{x\to c} f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to c} |f(x)| = 0$

Latihan:

Diketahui $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 1 \\ x+1 & 1 \le x < 2 \\ 5 & x = 2 \\ 2x-1 & x > 2 \end{cases}$

Gambarkan grafik $f(x)$ lalu hitung:

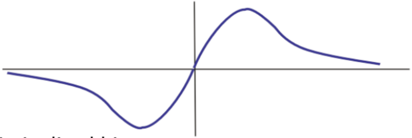
(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 2} f(x)$ (d) $\lim_{x\to 2.001} f(x)$

Limit di tak-hingga

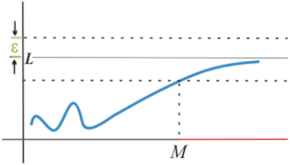
Limit di tak-hingga *menjelaskan perilaku fungsi $f(x)$ jika x membesar/mengecil tanpa batas*.

Ilustrasi:

Perhatikan $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
Bila x membesar terus tanpa batas, ditulis $x \to \infty$, nilai $f(x)$ 'cenderung' menuju 0.

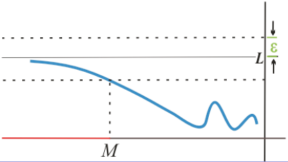


Fenomena ini mendasari konsep limit di takhingga



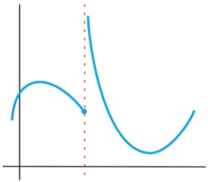
Misalkan f terdefinisi pada $[c, \infty)$. $\lim\limits_{x\to\infty} = L$ artinya untuk setiap $\epsilon > 0$, dapat dicari bilangan M sehingga $x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon$.

Misalkan f terdefinisi pada $(-\infty, c)$. $\lim\limits_{x\to-\infty} = L$ artinya untuk setiap $\epsilon > 0$, dapat dicari bilangan M sehingga $x < M \implies |f(x) - L| < \epsilon$.



Limit tak-hingga

Limit di tak-hingga *menjelaskan perilaku fungsi* $f(x)$ *dimana nilai* $f(x)$ *membesar/mengecil tanpa batas*.

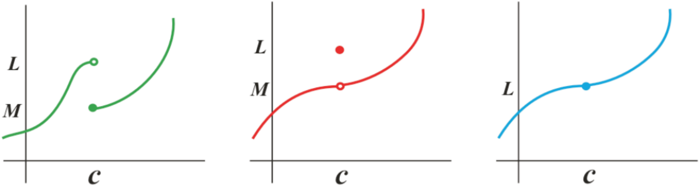


Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada $I = (a, b)$ kecuali mungkin di $c \in I$. Limit dari $f(x)$ untuk x mendekati c^+ bernilai ∞ dinotasikan dengan:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$$

artinya *untuk setiap bilangan* M*, dapat dicari* $\delta > 0$ *sehingga* $0 < x - c < \delta \Rightarrow f(x) > M$.

Kekontinuan fungsi



$f(c) = \cdots$	$f(c) = \cdots$	$f(c) = \cdots$
$\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \cdots$	$\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \cdots$	$\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \cdots$
$\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \cdots$	$\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \cdots$	$\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \cdots$

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada interval buka I dan $c \in I$. Fungsi f disebut *kontinu di titik c* jika:

$$f(c) = \lim_{x \to c} f(x) \ \Leftrightarrow \ f(c) = \lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x)$$

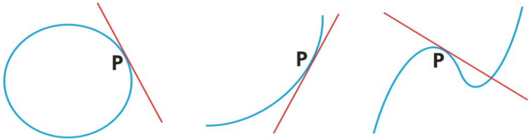
Contoh. Misalkan $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 5 & x = 2 \end{cases}$ Periksalah kekontinuan fungsi f di titik $x = 2$.

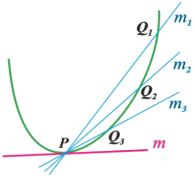
Kekontinuan sepihak & kekontinuan pada interval

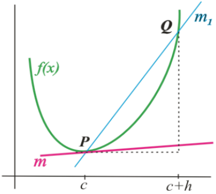
- Fungsi f disebut *kontinu kiri di $x = c$* jika $f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x)$
- Fungsi f disebut *kontinu kanan di $x = c$* jika $f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x)$

- Fungsi f disebut *kontinu pada interval buka (a, b)* jika f kontinu pada setiap titik di (a, b)
- Fungsi f disebut *kontinu pada interval tutup $[a, b]$* jika f kontinu pada setiap titik di $[a, b]$

Konsep garis singgung







Kemiringan garis talibusur yang melalui titik P dan Q adalah:

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Kemiringan garis singgung di titik $P = (c, f(c))$ didefinisikan sebagai:

$$m = \lim_{h \to 0} m_{\text{sec}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Turunan

Misalkan f adalah sebuah fungsi riil dan $x \in D_f$.

Turunan dari f di titik x, ditulis sebagai

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Aturan turunan

Aturan-aturan Turunan:

- Misalkan k suatu konstanta, maka $D_x[k] = 0$ (buktikan !)
- $D_x[x] = 1$
- Misalkan $n \in \mathbb{N}$ maka $D_x[x^n] = n\, x^{n-1}$ (buktikan !)
- Misalkan k suatu konstanta, maka $D_x[k\, f(x)] = k\, D_x[f(x)]$
- $D_x[(f \pm g)(x)] = D_x[f(x)] \pm D_x[g(x)]$
- $D_x[(fg)(x)] = D_x[f(x)]\, g(x) + f(x)\, D_x[g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $D_x[(\frac{f}{g})(x)] = \frac{D_x[f(x)]\, g(x) - f(x)\, D_x[g(x)]}{(g(x))^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
- Misalkan $n \in \mathbb{N}$ maka $D_x[x^{-n}] = -n\, x^{-n-1}$

Aturan turunan

Aturan Turunan Fungsi Trigonometri:

- $D_x[\sin x] = \cos x$ **(buktikan !)** $\quad D_x[\cos x] = -\sin x$
- $D_x[\tan x] = \sec^2 x \quad D_x[\cot x] = -\csc^2 x$
- $D_x[\sec x] = \sec x\ \tan x \quad D_x[\csc x] = -\csc x\ \cot x$

Dimana berbagai konsep tersebut digunakan?

EVERYWHERE

end of slide...

Referensi

Warsoma Djohan & Wono Setya Budhi.
Diktat Kalkulus.
Departemen Matematika, FMIPA, Institut Teknologi Bandung, 2007.