Matematika Diskrit

[KOMS124210] - 2024/2025

9.2 - Permutasi

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 9 & 10 (April 2025)

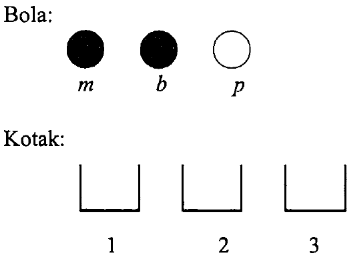
Bagian 4: Permutasi

Contoh motivasi 1

Misalkan ada 3 bola dengan warna berbeda yaitu:

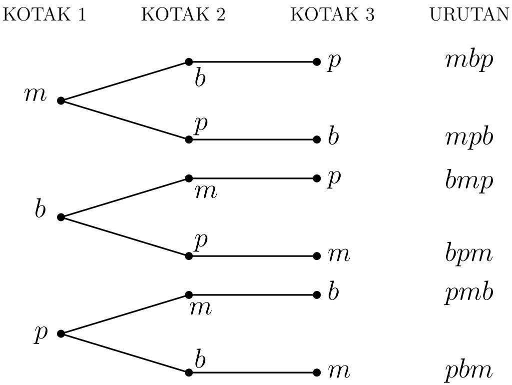
merah (m), biru (b), dan putih (p)

Bola akan dimasukkan ke dalam tiga kotak, dimana setiap kotak terdiri dari 1 bola.



Tentukan banyaknya urutan berbeda untuk menempatkan bola ke dalam kotak.

Contoh motivasi 1 (*solusi*)



Urutan berbeda ditentukan oleh banyaknya permutasi.

Permutasi n objek dari n objek

Misalkan diberikan n objek, maka banyaknya permutasi adalah:

$$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

- Urutan pertama dapat dipilih dari n objek
- Urutan pertama dapat dipilih dari $n-1$ objek
- $\ldots$
- Urutan terakhir dapat dipilih dari 1 objek

Contoh motivasi 2

Diberikan 6 bola dengan warna yang berbeda:

> *merah (m), biru (b), putih (p), hijau (h), kuning (k), dan jingga (j)*

Keenam bola tersebut akan dimasukkan ke dalam **tiga kotak**, dimana setiap kotak dapat diisi oleh 1 bola.

Tentukan banyaknya urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak.

Contoh motivasi 2

Diberikan 6 bola dengan warna yang berbeda:

> *merah (m), biru (b), putih (p), hijau (h), kuning (k), dan jingga (j)*

Keenam bola tersebut akan dimasukkan ke dalam **tiga kotak**, dimana setiap kotak dapat diisi oleh 1 bola.

Tentukan banyaknya urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak.

Solusi:

- Kotak 1 diisi oleh salah satu dari 6 bola (6 pilihan)
- Kotak 1 diisi oleh salah satu dari 5 bola (5 pilihan)
- Kotak 1 diisi oleh salah satu dari 4 bola (4 pilihan)

Banyaknya urutan berbeda untuk menempatkan bola adalah:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Permutasi r objek dari n objek

- Urutan pertama dapat dipilih dari n objek
- Urutan pertama dapat dipilih dari $n-1$ objek
- $\ldots$
- Urutan terakhir dapat dipilih dari $n-(r-1)$ objek

Banyaknya urutan berbeda adalah:

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Catatan: Jika $r = n$, maka:

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

(*sama dengan permutasi n objek dari n objek*)

Latihan 1

Contoh

Tentukan banyaknya "kata" yang dapat dibentuk dari huruf-huruf "$B \quad O \quad S \quad A \quad N$".

Latihan 1

Contoh

Tentukan banyaknya "kata" yang dapat dibentuk dari huruf-huruf " B O S A N".

Solusi:

- Cara 1, dengan aturan perkalian, yaitu:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Latihan 1

Contoh

Tentukan banyaknya "kata" yang dapat dibentuk dari huruf-huruf "B O S A N".

Solusi:

- Cara 1, dengan aturan perkalian, yaitu:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

- Cara 2, dengan aturan permutasi n objek dari n objek, yaitu:

$$P(5,5) = 5! = 120$$

Latihan 2

Contoh

Tentukan banyaknya cara mengurutkan nama 25 orang mahasiswa

Latihan 2

Contoh

Tentukan banyaknya cara mengurutkan nama 25 orang mahasiswa

Solusi:

Asumsi: tidak ada dua mahasiswa yang memiliki nama yang sama.

Analogi: mengisi 25 kotak dengan 25 huruf berbeda, dimana setiap kotak diisi 1 huruf.

Banyaknya cara pengurutan nama mahasiswa:

$$P(25, 25) = 25!$$

Latihan 3

Contoh

Diberikan tiga ujian dalam suatu periode enam hari (Senin s.d. Sabtu).

Tentukan banyaknya pengaturan jadwal sehingga tidak ada dua ujian atau lebih yang dilakukan pada hari yang sama.

Latihan 3

Contoh

Diberikan tiga ujian dalam suatu periode enam hari (Senin s.d. Sabtu).

Tentukan banyaknya pengaturan jadwal sehingga tidak ada dua ujian atau lebih yang dilakukan pada hari yang sama.

Solusi:

- Cara 1, dengan aturan perkalian, yaitu:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Latihan 3

Contoh

Diberikan tiga ujian dalam suatu periode enam hari (Senin s.d. Sabtu).

Tentukan banyaknya pengaturan jadwal sehingga tidak ada dua ujian atau lebih yang dilakukan pada hari yang sama.

Solusi:

- Cara 1, dengan aturan perkalian, yaitu:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

- Cara 2, dengan aturan permutasi 3 objek dari 6 objek, yaitu:

$$P(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$$

Latihan 4

Contoh

Tentukan banyaknya string yang dapat dibentuk, yang terdiri dari 4 huruf berbeda diikuti dengan 3 angka berbeda.

Latihan 4

Contoh

Tentukan banyaknya string yang dapat dibentuk, yang terdiri dari 4 huruf berbeda diikuti dengan 3 angka berbeda.

Solusi:

- Terdapat $P(26, 4)$ banyaknya susunan 4 huruf berbeda
- Terdapat $P(10, 3)$ banyaknya susunan 3 angka berbeda

Jadi, banyaknya string yang memenuhi syarat tersebut adalah:

$$P(26, 4) \cdot P(10, 3) = 258, 336, 000$$

Latihan 5

Contoh

Tentukan banyaknya kemungkinan membentuk 3 angka dari 5 angka: 1,2,3,4,5, sehingga:

1. *tidak boleh ada pengulangan angka;*
2. *boleh ada pengulangan angka.*

Latihan 5

Contoh

Tentukan banyaknya kemungkinan membentuk 3 angka dari 5 angka: 1,2,3,4,5, sehingga:

1. *tidak boleh ada pengulangan angka;*
2. *boleh ada pengulangan angka.*

Solusi:

1. Dapat digunakan kaidah perkalian atau metode permutasi, yaitu: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, atau $P(5,3) = 120$.
2. Tidak dapat menggunakan metode permutasi, namun dapat digunakan kaidah perkalian, yaitu: $5 \cdot 5 \cdot = 125$.

Latihan 6

Contoh

Tentukan banyaknya string yang dapat dibentuk dari permutasi huruf "SARUNG" sehingga huruf-huruf vokal terletak pada posisi saling bersebelahan.

Latihan 6

Contoh

Tentukan banyaknya string yang dapat dibentuk dari permutasi huruf "SARUNG" sehingga huruf-huruf vokal terletak pada posisi saling bersebelahan.

Solusi:

Kita mencari string yang memuat "au" atau "ua".

- Jadi huruf "au" atau "ua" dapat dilihat sebagai satu blok.
- Banyaknya permutasi huruf: au, s, r, n, g adalah $P(5,5) = 5! = 120$.
- Banyaknya permutasi huruf: ua, s, r, n, g adalah $P(5,5) = 5! = 120$.

Jadi, banyaknya string yang dapat dibuat adalah: $120 + 120 = 240$.

Bagian 5: Permutasi melingkar

Contoh motivasi permutasi melingkar

Diberikan 10 orang yang duduk pada suatu **barisan** yang terdiri dari 10 kursi.

Bagaimana jika kursi-kursi dalam posisi **melingkar**?

Contoh motivasi permutasi melingkar

Diberikan 10 orang yang duduk pada suatu **barisan** yang terdiri dari 10 kursi.

Bagaimana jika kursi-kursi dalam posisi **melingkar**?

- Satu orang pertama dapat duduk di posisi manapun.
- 9 orang lainnya dapat duduk dalam cara sebanyak:

$$9 \times 8 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = 9!$$

Contoh motivasi permutasi melingkar

Diberikan 10 orang yang duduk pada suatu **barisan** yang terdiri dari 10 kursi.

Bagaimana jika kursi-kursi dalam posisi **melingkar**?

- Satu orang pertama dapat duduk di posisi manapun.
- 9 orang lainnya dapat duduk dalam cara sebanyak:

$$9 \times 8 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = 9!$$

Definisi (Permutasi melingkar)

Permutasi melingkar dari n objek adalah penyusunan objek-objek dalam urutan melingkar. Banyaknya susunan adalah $(n-1)!$.

Latihan 1

Suatu pesta dihadiri oleh 7 orang yang duduk mengelilingi meja bundar. Berapa banyak cara mereka dapat duduk sehingga setiap susunan yang hanya berbeda karena rotasi dianggap sama?

Latihan 1

Suatu pesta dihadiri oleh 7 orang yang duduk mengelilingi meja bundar. Berapa banyak cara mereka dapat duduk sehingga setiap susunan yang hanya berbeda karena rotasi dianggap sama?

Solusi:
Untuk permutasi melingkar, jumlah susunan yang berbeda adalah:

$$(n-1)! \quad \text{dengan } n \text{ adalah jumlah orang.}$$

Dalam kasus ini, $n = 7$, sehingga banyaknya susunan adalah:

$$(7-1)! = 6! = 720.$$

Jadi, terdapat 720 cara bagi 7 orang untuk duduk mengelilingi meja bundar.

Latihan 2

Dalam suatu pertemuan, terdapat 5 tamu yang duduk melingkar di sekitar meja bundar. Namun, dua orang tertentu harus duduk bersebelahan. Berapa banyak cara untuk mengatur tempat duduk mereka?

Latihan 2

Dalam suatu pertemuan, terdapat 5 tamu yang duduk melingkar di sekitar meja bundar. Namun, dua orang tertentu harus duduk bersebelahan. Berapa banyak cara untuk mengatur tempat duduk mereka?

Solusi:
Kita anggap dua orang yang harus duduk bersebelahan sebagai satu *kelompok* yang tidak terpisahkan. Maka, jumlah objek yang disusun melingkar menjadi $5 - 1 = 4$ (kelompok ini dihitung sebagai satu objek).
Jumlah susunan melingkar dari 4 objek adalah:

$$(4 - 1)! = 3! = 6.$$

Di dalam kelompok, dua orang dapat bertukar tempat dengan $2! = 2$ cara.
Oleh karena itu, jumlah total susunan adalah:

$$6 \times 2 = 12.$$

Jadi, terdapat 12 cara untuk mengatur tempat duduk mereka sehingga dua orang tertentu selalu duduk bersebelahan.

bersambung...