

Matematika Diskrit

[KOMS124210] - 2024/2025

13. Graf Pohon

sebagian besar materi pada perkuliahan ini bersumber dari bahan kuliah Matematika Diskrit ITB oleh Rinaldi Munir

Dewi Sintiar

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 13 (Mei 2025)

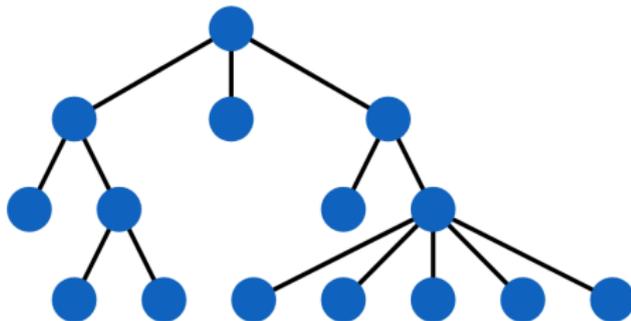
Graf pohon

Pohon

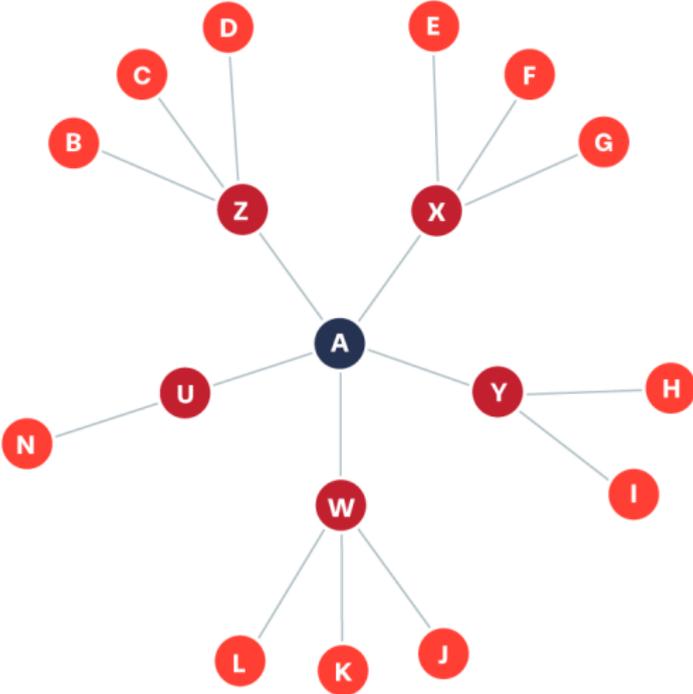
Coba Anda deskripsikan **pohon** berikut.



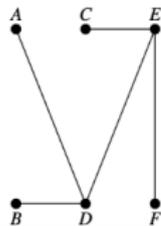
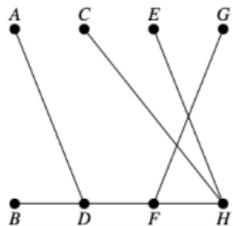
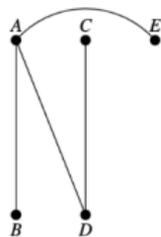
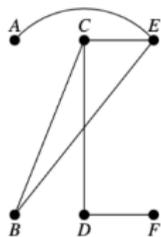
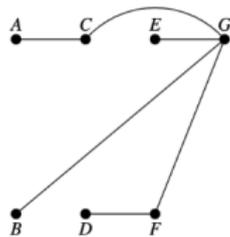
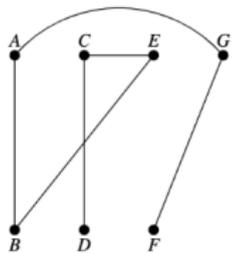
Graf pohon



Graf pohon



Graf pohon



Ciri-ciri graf pohon

Graf pohon adalah graf yang memenuhi kriteria berikut.

- ▶ tak berarah
- ▶ sederhana
- ▶ terhubung
- ▶ tidak memuat sirkuit

Sifat-sifat graf pohon

Diskusikan kebenaran sifat-sifat graf pohon berikut.

Teorema

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf tak-berarah sederhana dengan banyaknya simpul n . Maka pernyataan berikut ekuivalen:

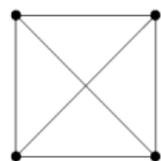
1. G adalah graf pohon.
2. Untuk setiap pasang simpul u dan v , terdapat tepat satu lintasan yang menghubungkan u dan v di G .
3. G terhubung dan memiliki sebanyak $(n - 1)$ sisi.
4. G tidak memuat sirkuit dan memiliki $(n - 1)$ sisi.
5. G tidak memuat sirkuit dan penambahan satu sisi pada graf menghasilkan tepat satu sirkuit.
6. G terhubung dan menghapus sebuah sisi akan menyebabkan G menjadi tidak terhubung.

Graf pohon merentang

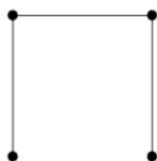
Pohon merentang (*spanning tree*)

Sebuah subgraf dikatakan **merentang** jika subgraf tersebut memuat semua simpul graf.

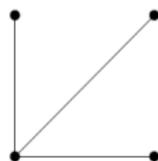
Pohon merentang adalah subgraf yang merentang dan membentuk sebuah graf pohon.



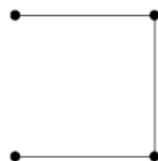
G



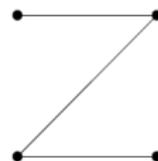
T_1



T_2



T_3



T_4

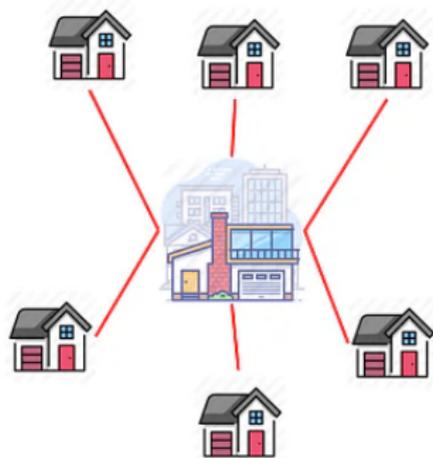
Periksalah kebenaran pernyataan berikut

- ▶ Setiap graf terhubung mempunyai paling sedikit satu buah pohon merentang.
- ▶ Jika sebuah graf merupakan graf tidak terhubung dan memiliki k komponen terhubung, maka terdapat k pohon merentang yang termuat pada masing-masing komponen terhubung-nya.
- ▶ Sebuah graf terhubung mungkin memiliki lebih dari satu pohon merentang.

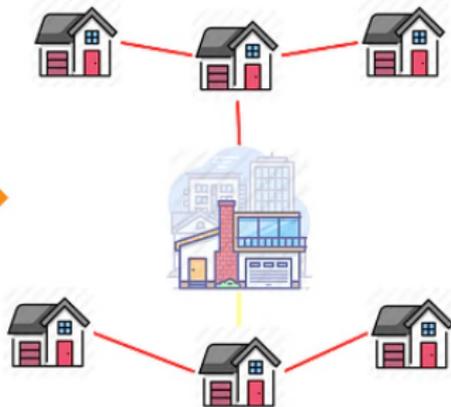
Solusi:

- ▶ ...
- ▶ ...
- ▶ ...

Penerapan pohon merentang



Naïve telecommunication routing, generates new connection line for each customer, which leads to huge cost.

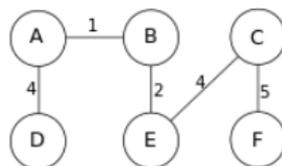
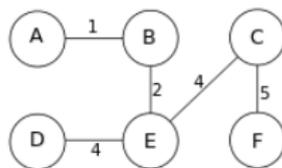
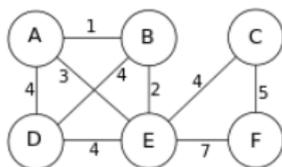


Minimum Spanning Tree Routing generates connection line in less cost with high efficiency.

Pohon merentang minimum (*minimum spanning tree*)

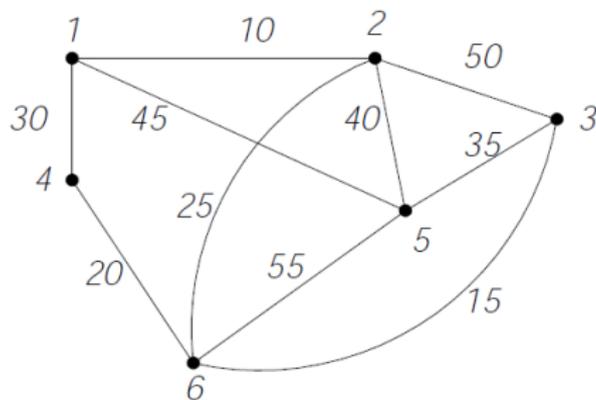
Graf berbobot adalah graf yang sisi-sisinya memiliki bobot (di \mathbb{R}). Graf terhubung berbobot mungkin memiliki lebih dari satu pohon merentang.

- **Interest:** pohon merentang minimum

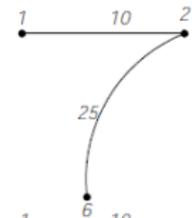
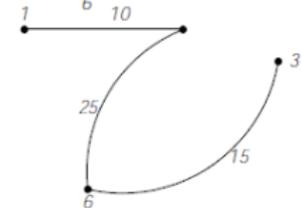
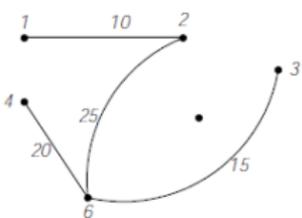


Contoh pencarian pohon merentang minimum (1)

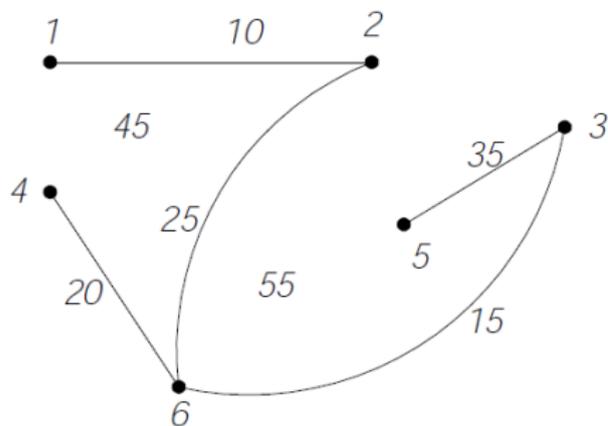
Diberikan pohon merentang sebagai berikut. Tentukan pohon merentang minimum-nya dengan cara membuat daftar pohon merentang yang mungkin dari graf tersebut.



Contoh pencarian pohon merentang minimum (2)

Langkah	Sisi	Bobot	Pohon rentang
1	(1, 2)	10	
2	(2, 6)	25	
3	(3, 6)	15	
4	(4, 6)	20	

Contoh pencarian pohon merentang minimum (3)



$$B_{\text{obot}} = 10 + 25 + 15 + 20 + 35 = 105$$

Latihan (berkelompok)

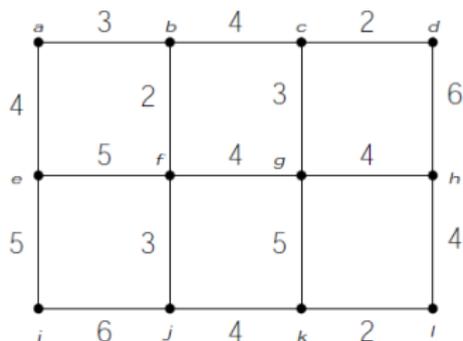
- ▶ Buatlah sebuah graf berbobot, dengan 8-10 simpul.
- ▶ Tentukan pohon merentang minimum dari graf tersebut.

Solusi:

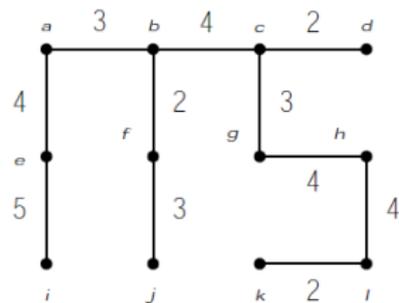
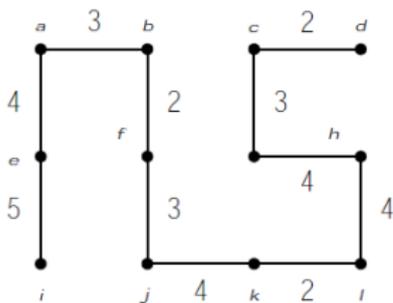
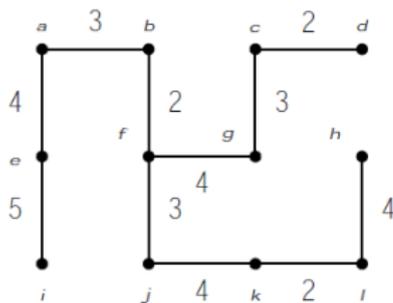
.....
.....
.....

- ▶ Berapakah banyaknya pohon merentang minimum yang Anda temukan?

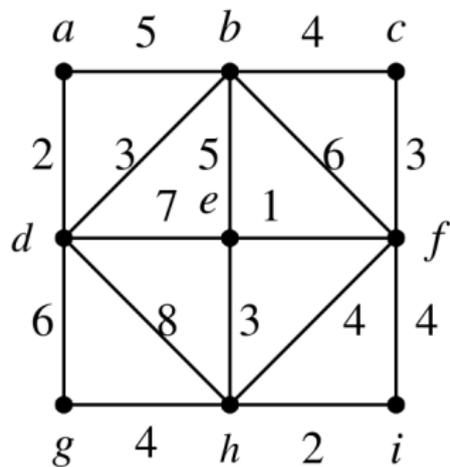
Graf dengan lebih dari satu pohon merentang minimum



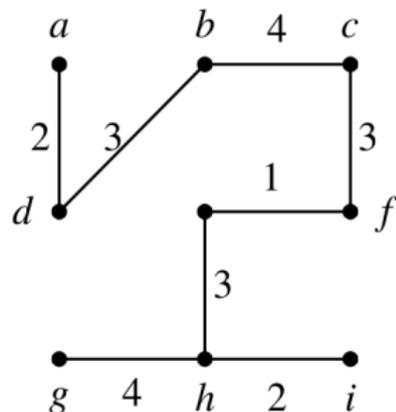
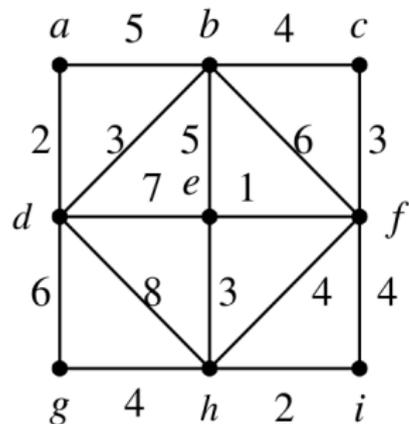
Tiga buah pohon merentang minimumnya adalah:



Latihan



Latihan



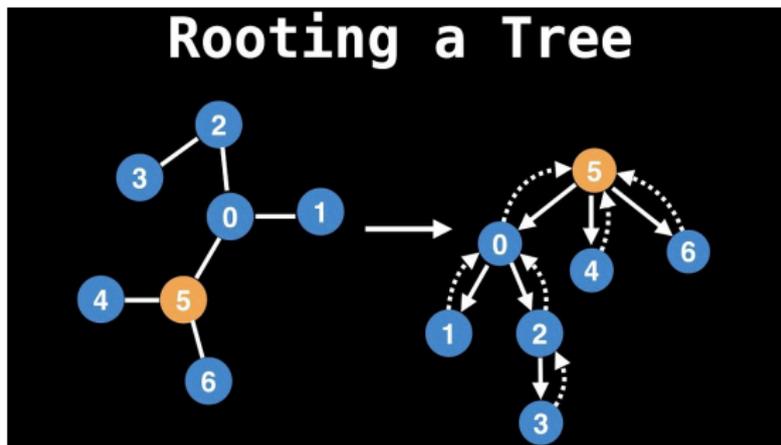
Graf pohon berakar

Graf pohon berakar (1)



Graf pohon berakar (2)

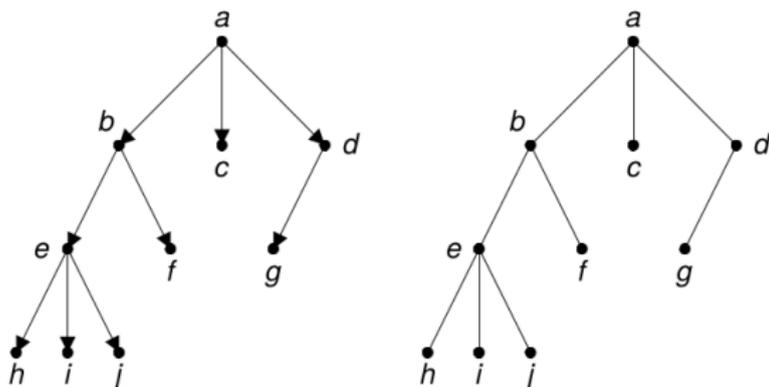
Sebuah graf pohon **berakar** diperoleh dengan cara memilih sebuah simpul untuk diperlakukan sebagai akar, dan sisi-sisi lainnya diberikan arah.



Catatan: pada graf pohon berakar, biasanya simpul yang menjadi akar diposisikan pada posisi paling atas.

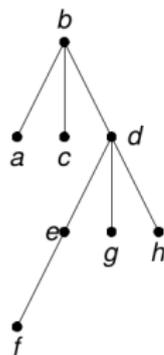
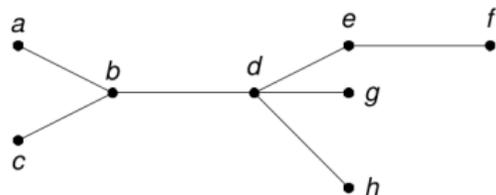
Graf pohon berakar (3)

Sisi-sisi berarah pada graf pohon berakar **tidak perlu** digambarkan.

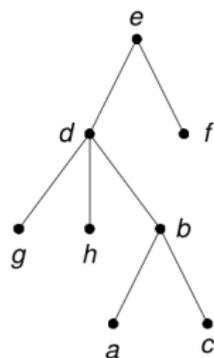


Graf pohon berakar (4)

Pemilihan akar pada graf pohon berakar menentukan bentuk dari graf pohon berakar tersebut.

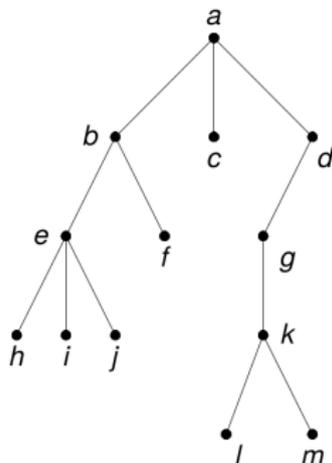


b sebagai akar



e sebagai akar

Parent, child, sibling



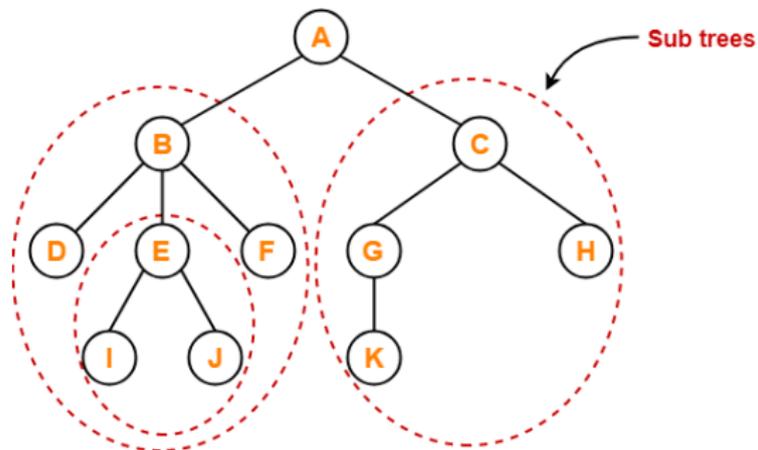
- ▶ b, c, d adalah **anak-anak (*children*)** dari simpul a
- ▶ a adalah **orang tua (*parent*)** dari simpul b, c, d
- ▶ b, c, d adalah **saudara (*sibling*)**; tetapi f dan g bukan saudara

Daun & simpul dalam

- ▶ **Daun** adalah simpul-simpul yang tidak memiliki anak (dengan kata lain, memiliki derajat 1). Misalnya: h, i, j, l, m .
- ▶ **Simpul dalam** adalah simpul-simpul yang bukan akar dan bukan daun. Misalnya: b, c, d, e, f, g, k

Subtree

Subgraf dari suatu graf pohon disebut *subtree*.



Tingkat (*level*) & kedalaman (*depth/height*)

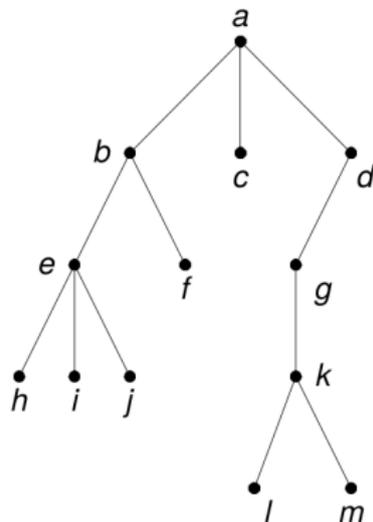


Figure: Tingkat dari setiap simpul pada graf pohon

Kedalaman dari sebuah graf pohon berakar adalah tingkat maksimum dari graf pohon tersebut. Misalnya graf di atas memiliki kedalaman 4.

Pohon teratur (*ordered tree*)

Pohon berakar yang simpul-simpulnya diberikan urutan tertentu disebut **pohon teratur** (*ordered tree*).

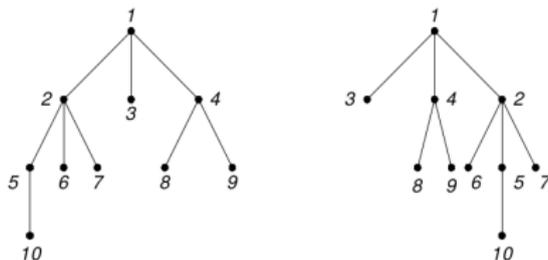
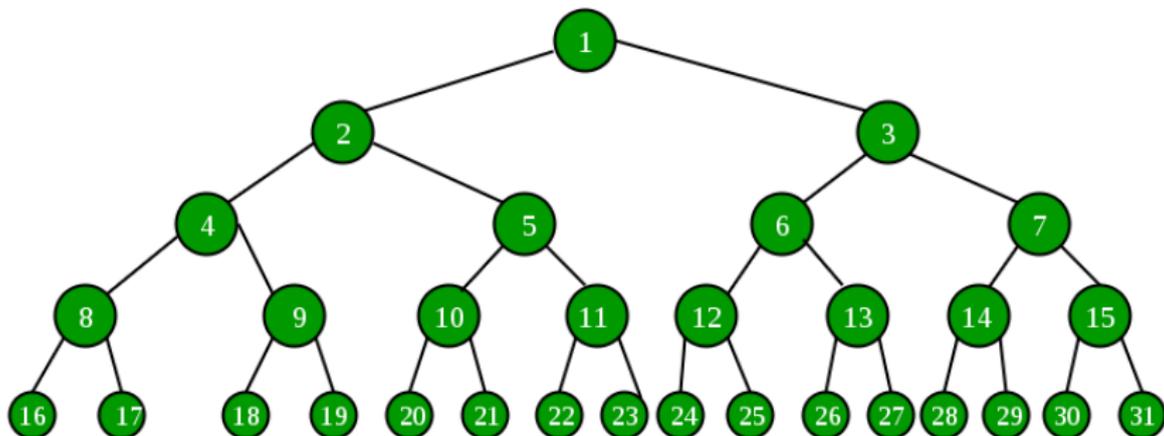


Figure: Pohon biner teratur

Graf pohon biner

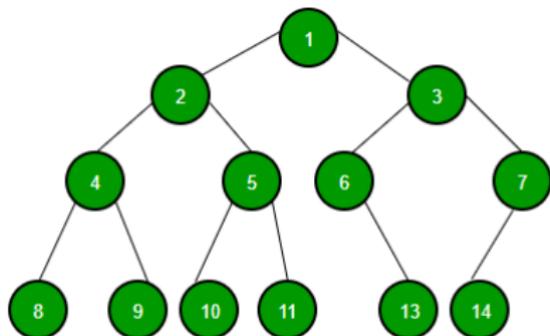
Pohon biner (*binary tree*)

Graf pohon biner adalah graf dimana setiap simpulnya memiliki paling banyak dua anak.



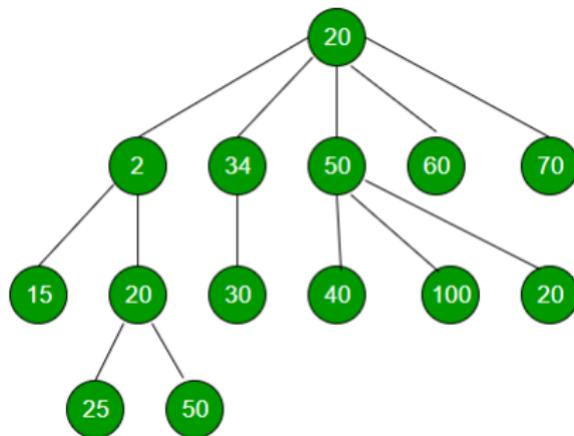
Pohon biner (*binary tree*)

Graf pohon biner adalah graf dimana setiap simpulnya memiliki paling banyak dua anak.



Pohon n -ary (n -ary tree)

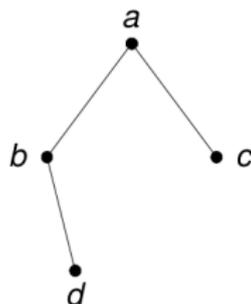
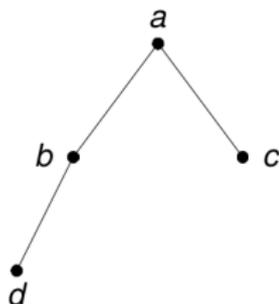
Graf pohon yang simpul-simpulnya memiliki **paling banyak** n anak disebut graf pohon n -ary.



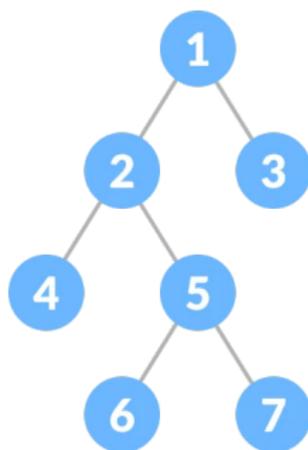
Notasi pada pohon biner

Pohon biner adalah pohon **terurut** (ada urutan pada simpul-simpulnya)

- ▶ Anak kiri (*left child*)
- ▶ Anak kanan (*right child*)

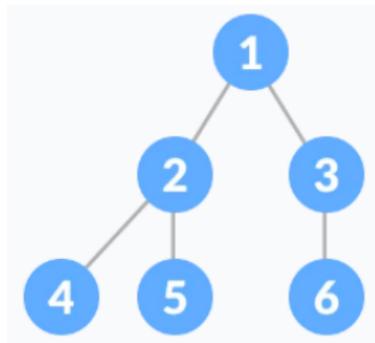


Pohon biner penuh (*full binary tree*)



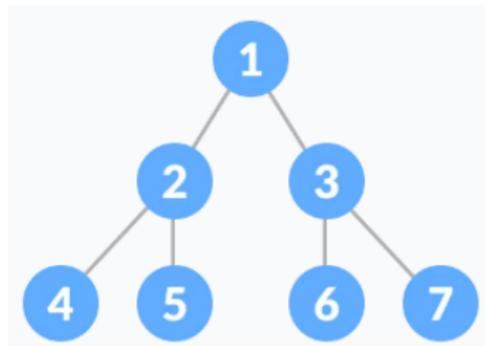
Pohon biner dikatakan **penuh (*full*)** jika setiap simpul yang bukan simpul daun memiliki dua anak.

Pohon biner seimbang (*balanced binary tree*)



Pohon biner dikatakan *seimbang* (*balanced*) jika kedalaman dari simpul-simpul daun-nya berbeda maksimum 1.

Pohon biner penuh & seimbang



Pohon biner dikatakan **penuh dan seimbang** jika ia pohon biner penuh dan pohon biner seimbang.

Contoh penerapan pohon biner

Aktivitas eksploratif

Bentuklah kelompok diskusi dan carilah penerapan pohon biner dalam bidang Ilmu Komputer.

Beberapa contoh penerapan:

- ▶ Binary search
- ▶ Kode Huffman
- ▶ ...
- ▶ ...