Matematika Diskrit

[KOMS119602] - 2022/2023

4.1 - Fungsi & Jenis Fungsi

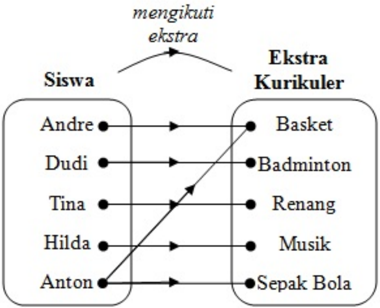
Dewi Sintiari

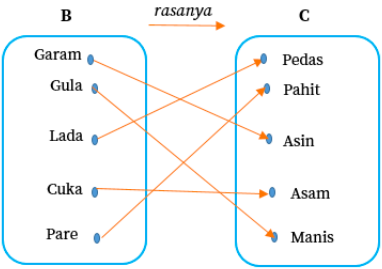
Prodi D4 Teknologi Rekayasa Perangkat Lunak
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 7-11 February 2022

Bagian 1: Konsep fungsi

Konsep fungsi





Apa yang dapat Anda amati dari kedua gambar di atas?

Definisi fungsi

Coba tuliskan karakteristik fungsi berdasarkan hasil observasi tersebut!

1.
2.

Definisi fungsi

Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Fungsi f dari A ke B adalah pemasangan tepat satu elemen B ke setiap elemen A.

Kita menulis $f(a) = b$ jika b adalah elemen tunggal B yang ditetapkan oleh fungsi f ke elemen a dari A.

Jika f adalah fungsi dari A ke B, maka ditulis:

$$f : A \to B$$

dan dikatakan f memetakan A ke B.

> *Dapatkah Anda memberikan contoh fungsi dalam dunia nyata?*

Terminologi

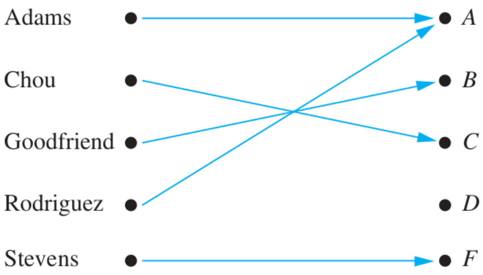
Untuk fungsi:

$$f : A \to B$$

- A disebut domain dari f;
- B disebut codomain dari f;
- Jika $f(a) = b$, maka b disebut bayangan (*image*) dari a, dan a adalah *pre-image* dari b;
- Daerah hasil (*range*) dari f adalah himpunan semua bayangan dari elemen di A.

Latihan 1

Jelaskan domain, codomain, dan range dari fungsi berikut.



Latihan 2

Diberikan relasi pasangan terurut:

> *(Andi, 22), (Budi, 24), (Cindi, 21), (Dandi, 22), (Edi, 23), dan (Frendi, 22)*

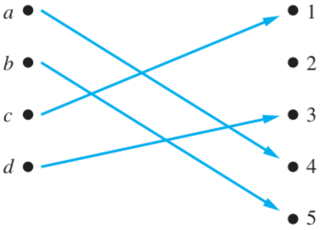
- Gambarkan dalam diagram.
- Apakah relasi tersebut merupakan fungsi?
- Relasi apakah yang sesuai dengan pasangan terurut yang diberikan?

1. Fungsi injektif (satu-satu/*one-to-one*)

Fungsi $f : A \rightarrow B$ dikatakan injektif jika dan hanya jika:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b, \quad \forall a, b \in A$$

Ini berarti, setiap elemen di B haruslah memiliki paling banyak satu pre-image di A.

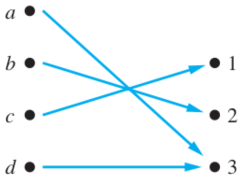


2. Fungsi surjektif (pada/*onto*)

Fungsi $f : A \to B$ dikatakan surjektif jika dan hanya jika:

$$\forall b \in B,\ \exists a \in A,\ \text{dimana } f(a) = b$$

Ini berarti, setiap elemen di B memiliki sedikitnya satu pre-image di A.

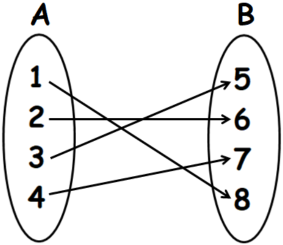


3. Fungsi bijektif

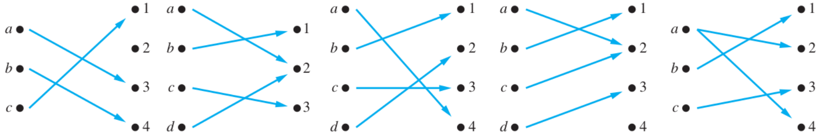
Fungsi $f : A \rightarrow$ dikatakan bijektif jika dan hanya jika:

- f adalah fungsi injektif; dan
- f adalah fungsi surjektif.

Ini berarti, setiap elemen di B memiliki <u>tepat satu</u> pre-image di A.



Latihan



Untuk setiap fungsi di atas, jelaskan termasuk jenis manakah fungsi tersebut?

Bagian 2: Invers fungsi

Definisi invers fungsi

Perhatikan fungsi-fungsi berikut:

- $y = 3x + 4$
- $y = x^2$
- $y = 2x^3 + 4$

Untuk setiap fungsi tersebut, nyatakan x sebagai fungsi dari y.

Solusi:

Definisi invers fungsi

Perhatikan fungsi-fungsi berikut:

- $y = 3x + 4$
- $y = x^2$
- $y = 2x^3 + 4$

Untuk setiap fungsi tersebut, nyatakan x sebagai fungsi dari y.

Solusi:

- $x = \frac{y-4}{3}$
- $x = \sqrt{y}$ atau $x = -\sqrt{y}$
- $x = \sqrt[3]{\frac{y-4}{2}}$

Definisi invers (balikan) fungsi (1)

Di antara relasi berikut, yang manakah yang merupakan fungsi?

Definisi invers (balikan) fungsi (1)

Di antara relasi berikut, yang manakah yang merupakan fungsi?

Jadi, apa syarat suatu fungsi f memiliki invers?

Definisi invers (balikan) fungsi (1)

Di antara relasi berikut, yang manakah yang merupakan fungsi?

Jadi, apa syarat suatu fungsi f memiliki invers?

Coba simpulkan definisi fungsi!

Definisi invers (balikan) fungsi (1)

Di antara relasi berikut, yang manakah yang merupakan fungsi?

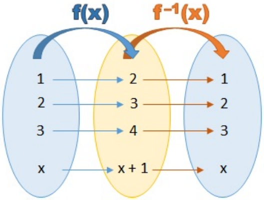
Jadi, apa syarat suatu fungsi f memiliki invers?

Coba simpulkan definisi fungsi!

Definisi

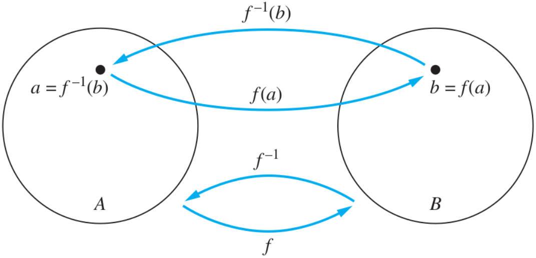
Misal $f : A \to B$ adalah sebuah fungsi bijektif. Maka, invers dari fungsi f (dilambangkan dengan f^{-1} didefinisikan sebagai fungsi dari B ke A yang memiliki sifat berikut:

$$\forall a \in A, b \in B,\ f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$



Definisi invers (balikan) fungsi (2)

Sebuah fungsi f yang memiliki invers disebut *invertible*, dan fungsi yang tidak memiliki invers disebut *not invertible*.



Latihan invers fungsi (1)

Soal 1.

Misal $f : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ sedemikian sehingga:

$$f(a) = 2, \; f(b) = 3, \; f(c) = 1$$

Apakah f memiliki invers? Jika iya, tuliskan invers fungsi f.

Solusi:

Latihan invers fungsi (2)

Soal 2.

Misal $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ adalah fungsi sedemikian sehingga

$$f(x) = x + 1$$

Apakah f memiliki invers? Jika iya, tuliskan invers fungsi f.

Solusi:

Latihan invers fungsi (3)

Soal 2.

Misal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi sedemikian sehingga

$$f(x) = x^2$$

Apakah f memiliki invers? Jika iya, tuliskan invers fungsi f.

Solusi:

Bagian 3: Beberapa fungsi penting

1. Fungsi polinomial

Perhatikan fungsi-fungsi berikut:

- $f(x) = ax + b$
- $f(x) = ax^2 + bx + c$
- $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Pola apa yang Anda amati dari fungsi-fungsi tersebut?

Definisi fungsi polinomial

Sebuah fungsi polinomial memiliki bentuk:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

2. Fungsi modulo

Misalkan $a \in \mathbb{Z}$ dan $m \in \mathbb{Z}^+$. Fungsi a modulo m dinotasikan sebagai:

$$a \mod m$$

yaitu fungsi yang memberikan sisa pembagian dari a bila dibagi dengan m.

Jadi,

$$a \mod m \equiv r$$

berarti $a = mq + r$ dengan $0 \leq r \leq m$.

Contoh fungsi modulo

- $13 \mod 5 \equiv \dots$
- $30 \mod 5 \equiv \dots$
- $13 \mod 20 \equiv \dots$
- $0 \mod 5 \equiv \dots$
- $-13 \mod 5 \equiv \dots$
- ...
- ...

3. Fungsi faktorial

Misalkan $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$. Fungsi faktorial dari n didefinisikan sebagai:

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n, & n > 0 \end{cases}$$

Example

- $0! = ?$
- $1! = ?$
- $2! = ?$
- $3! = ?$

4. Fungsi eksponensial

Misal $a \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{Z}^+$. Fungsi eksponensial didefinisikan sebagai:

$$a^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ times}}, & n > 0 \end{cases}$$

Untuk $n < 0$, didefinisikan:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Sifat-sifat fungsi eksponensial

Tugas: Sebutkan beberapa sifat fungsi eksponensial yang Anda ketahui!

1. $a^m \times a^n = ...$
2. $a^m / a^n = ...$
3. ...
4. ...

5. Fungsi logaritmik

Fungsi logaritmik merupakan invers dari fungsi eksponensial.

Diberikan $x = a^y$, bagaimana y dapat dinyatakan sebagai fungsi dari x?

$$x = a^y \Leftrightarrow y = {}^a\log x$$

Sifat-sifat fungsi logaritmik

Tugas: Sebutkan beberapa sifat fungsi logaritmik yang Anda ketahui!

1. ${}^a\log x \; + \; {}^a\log y$ ...
2. ${}^a\log x \; - \; {}^a\log y$ ...
3. ...
4. ...

6. Fungsi *floor* dan *ceiling*

Misalkan $x \in \mathbb{R}$, maka terdapat dua bilangan bulat z_1 dan z_2 yang "mengapit" x. Dengan kata lain:

$$z_1 \leq x \leq z_2$$

Dalam hal ini, dapat dilakukan pembulatan bilangan bulat **terdekat**, **ke atas**, atau **ke bawah**.

- Fungsi floor menyatakan nilai bilangan bulat **terbesar** yang **kurang dari atau sama dengan** x.

  Dilambangkan dengan $\lfloor x \rfloor$.

- Fungsi ceiling menyatakan nilai bilangan bulat **terkecil** yang **lebih dari atau sama dengan** x.

  Dilambangkan dengan $\lceil x \rceil$.

Contoh:

$\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$, $\lceil \frac{1}{2} \rceil = 1$, $\lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = -1$, $\lceil -\frac{1}{2} \rceil = 0$, $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$, $\lceil 3.1 \rceil = 4$, $\lfloor 7 \rfloor = 7$, $\lceil 7 \rceil = 7$

Sifat fungsi floor dan ceiling

TABLE 1 Useful Properties of the Floor and Ceiling Functions.
(n is an integer, x is a real number)

(1a)	$\lfloor x \rfloor = n$ if and only if $n \le x < n + 1$
(1b)	$\lceil x \rceil = n$ if and only if $n - 1 < x \le n$
(1c)	$\lfloor x \rfloor = n$ if and only if $x - 1 < n \le x$
(1d)	$\lceil x \rceil = n$ if and only if $x \le n < x + 1$
(2)	$x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x + 1$
(3a)	$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$
(3b)	$\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
(4a)	$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$
(4b)	$\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$

7. Fungsi rekursif

Tinjau fungsi berikut.

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n, & n > 0 \end{cases}$$

- Menggunakan definisi tersebut, hitunglah nilai dari 2!, 3!, 4!, ...
- Pola apa yang dapat diamati dari proses yang dilakukan?
- Bagaimana keterkaitan antara $n!$ dan $(n-1)!$?

Relasi rekurens

Relasi rekurens untuk barisan $\{a_n\}$ adalah persamaan yang menyatakan a_n dalam satu (atau lebih) suku-suku sebelumnya, yaitu $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Pada contoh sebelumnya, kita dapat menyatakan fungsi faktorial sebagai:

$$\begin{aligned} n! &= (n-1)!\; n \\ \Leftrightarrow\; f(n) &= f(n-1) \times n \end{aligned}$$

Sehingga fungsi rekursif-nya menjadi:

$$\begin{cases} f(1) & = 1 \\ f(n) & = f(n-1) \times n \end{cases}$$

Komponen fungsi rekursif

Perhatikan kembali fungsi tadi.

> *Apa yang dapat diamati dari fungsi tersebut? Apa saja komponennya?*

Komponen:

1. BASIS

   $\rightarrow$ berisi nilai awal yang tidak mengacu pada dirinya sendiri

2. REKURENS

   $\rightarrow$ mendefinisikan argumen fungsi dalam terminologi dirinya sendiri.

Latihan fungsi rekursif

Soal 1.

Dari fungsi rekurens:

$$\begin{aligned} n! &= (n-1)!\ n \\ \Leftrightarrow\ f(n) &= f(n-1) \times n \end{aligned}$$

jelaskan komponen BASIS dan REKURENS-nya.

Soal 2:

Berikan contoh fungsi rekursif lainnya (setiap mahasiswa memberikan contoh yang berbeda).

Bagian 4: Komposisi fungsi

Definisi komposisi fungsi

Misal:

- g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B.
- f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan A.

Komposisi dari fungsi f dan g untuk setiap $a \in A$, dilambangkan dengan $f \circ g$, didefinisikan sebagai:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

Komposisi dua fungsi

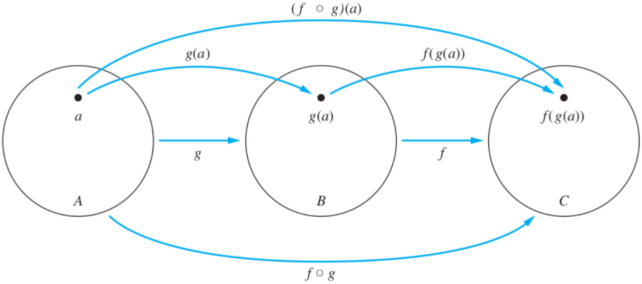


Figure: Komposisi dari fungsi f dan g

Latihan 1

Soal 1. Misal $g : \{a, b, c\} \rightarrow \{a, b, c\}$ sedemikian sehingga $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, dan $f(c) = 1$. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

Solusi:

Latihan 2

Soal 2. Misal $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dan $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, sedemikian sehingga $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = 3x + 2$. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

Solusi:

Bagian 5: Grafik Fungsi

Apa itu grafik fungsi?

Misal $f : A \to B$ adalah fungsi. Grafik fungsi f didefinisikan sebagai himpunan pasangan terurut $\{(a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$.

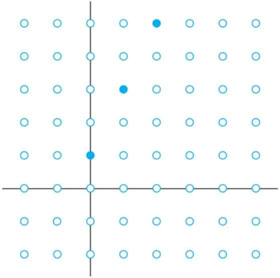


FIGURE 8 **The Graph of $f(n) = 2n + 1$ from Z to Z.**

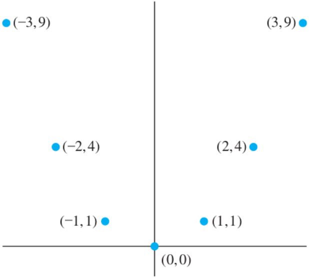


FIGURE 9 **The Graph of $f(x) = x^2$ from Z to Z.**

Contoh

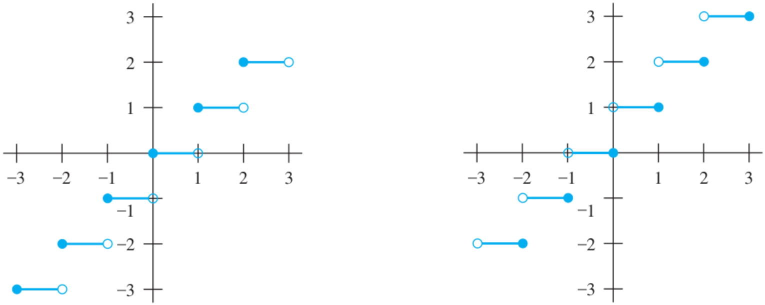


Figure: Grafik fungs floor $y = \lfloor x \rfloor$ dan ceiling $y = \lceil x \rceil$

bersambung...