

Matematika Diskrit

[KOMS119602] - 2022/2023

3 - Relasi

Dewi Sintiar

Prodi D4 Teknologi Rekayasa Perangkat Lunak
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 7-11 February 2022

Bagian 1: Pengantar matriks

Matriks

Matriks adalah array berbentuk persegi panjang atau tabel, berisikan angka, simbol, atau ekspresi, yang disusun dalam **baris** dan **kolom**, yang digunakan untuk mewakili objek matematika atau properti dari objek tersebut.

Matriks dengan m baris dan n kolom dituliskan sebagai:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Catatan:

- ▶ Matriks biasanya dituliskan dengan $M = [a_{ij}]$.
- ▶ Elemen pada baris ke- i kolom ke- j matriks A disimbolkan dengan A_{ij}

Matriks persegi

Matriks **persegi (bujur sangkar)** adalah matriks dengan banyak baris dan kolom sama.

Contoh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

Matriks simetri

Matriks **simetri** adalah matriks $A_{n \times n}$ (i.e., matriks persegi) dimana untuk setiap $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ berlaku:

$$A_{ij} = A_{ji}$$

yakni, elemen baris i kolom j sama dengan elemen baris j kolom i

Contoh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriks biner

Matriks **biner** atau **0/1** adalah matriks yang elemen-elemennya adalah 0 atau 1.

Contoh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bagian 2: Relasi

Relasi

Relasi antar himpunan menggambarkan hubungan antar anggota himpunan terkait.

Dalam hal ini, relasi dari $a \in A$ dan $b \in B$ dinyatakan dengan **pasangan terurut** (*ordered pairs*) (a, b) .

Catatan: Relasi adalah hubungan yang bersifat abstrak, dan tidak harus memiliki makna secara konkret maupun matematis.

▶ Contoh relasi:

Contoh relasi

Contoh

Diberikan himpunan:

$A = \text{himpunan mahasiswa} = \{\text{Wayan, Made, Nyoman, Ketut, Putu}\}$

$B = \text{himpunan mata kuliah} = \{MD = \text{Matematika Diskrit},$

$KB = \text{Kecerdasan Buatan}, PM = \text{Pembelajaran Mesin},$

$BD = \text{Basis Data}, S = \text{Statistika}, P = \text{Pemrograman}\}$

Misalkan R menyatakan relasi antara himpunan A dan B , yaitu mata kuliah favorit mahasiswa.

$\{(\text{Wayan}, KB), (\text{Made}, BD), (\text{Ketut}, PM), (\text{Ketut}, S), (\text{Putu}, BD)\}$

Sifat relasi

Dari contoh sebelumnya, dapat diamati beberapa hal sebagai berikut:

- ▶ terdapat mahasiswa yang memiliki lebih dari satu matkul favorit
- ▶ terdapat mahasiswa yang tidak memiliki matkul favorit
- ▶ terdapat matkul yang disukai lebih dari satu mahasiswa
- ▶ terdapat matkul yang disukai lebih dari satu mahasiswa

Dalam relasi, **tidak ada** aturan baku bagaimana elemen-elemen pada himpunan A dihubungkan dengan elemen pada himpunan B .

Relasi biner

Relasi biner R antara himpunan A dan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$, atau elemen dari $2^{A \times B}$ (*power set* dari $A \times B$).

$$R \subseteq A \times B$$

Notasi:

- ▶ $a R b$ menotasikan $(a, b) \in R$, berarti a dihubungkan dengan b oleh R .
- ▶ $a \not R b$ menotasikan $(a, b) \notin R$, berarti a tidak dihubungkan dengan b oleh R .
- ▶ Pada relasi A ke B , himpunan A disebut **daerah asal** (*domain*) dan himpunan B disebut **daerah kawan** (*codomain*).
- ▶ Himpunan yang dibentuk oleh elemen B yang memiliki relasi dengan suatu elemen di A disebut himpunan **daerah hasil** (*range*).

Contoh *domain-codomain-range*

Perhatikan kembali contoh sebelumnya:

$A =$ himpunan mahasiswa = {Wayan, Made, Nyoman, Ketut, Putu}

$B =$ himpunan mata kuliah = {MD = Matematika Diskrit,

KB = Kecerdasan Buatan, PM = Pembelajaran Mesin,

BD = Basis Data, S = Statistika, P = Pemrograman}

Misalkan R menyatakan relasi antara himpunan A dan B , yaitu mata kuliah favorit mahasiswa.

$\{(Wayan, KB), (Made, BD), (Ketut, PM), (Ketut, S), (Putu, BD)\}$

Dari relasi tersebut:

- ▶ *Domain*: {Wayan, Made, Nyoman, Ketut, Putu}
- ▶ *Codomain*: {MD, KB, PM, BD, S, P}
- ▶ *Range*: {KB, BD, PM, S}

Relasi pada sebuah himpunan

Relasi pada sebuah himpunan A adalah relasi dari A ke A

- ▶ Relasi pada himpunan A adalah himpunan bagian dari $A \times A$

$$R \subseteq A \times A$$

Contoh

Diberikan $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ serta relasi: $(x, y) \in R$ jika x adalah faktor prima dari y . Maka:

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), \\ (3, 3), (3, 6), (3, 9), (5, 5), (5, 10), (7, 7)\}$$

Latihan

Buatlah dua himpunan dan definisikan tiga contoh relasi (dengan makna) antar kedua himpunan tersebut!

Bagian 3: Representasi relasi

Representasi relasi

Beberapa cara menuliskan relasi antar-himpunan:

1. Himpunan pasangan berurutan
2. Diagram panah
3. Tabel
4. Matriks
5. Graf berarah

Contoh kasus

$A =$ himpunan mahasiswa = {Wayan, Made, Nyoman, Ketut, Putu}

$B =$ himpunan mata kuliah = {MD = Matematika Diskrit,

KB = Kecerdasan Buatan, PM = Pembelajaran Mesin,

BD = Basis Data, S = Statistika, P = Pemrograman}

Misalkan R menyatakan relasi antara himpunan A dan B , yaitu mata kuliah favorit mahasiswa.

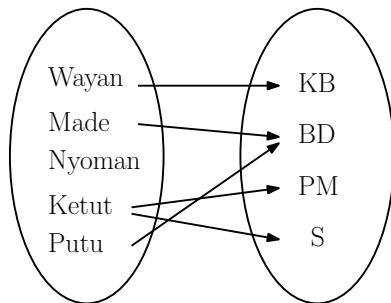
{(Wayan, KB), (Made, BD), (Ketut, PM), (Ketut, S), (Putu, BD)}

Himpunan pasangan berurutan

Menuliskan relasi dalam bentuk himpunan pasangan berurutan:

$\{(Wayan, KB), (Made, BD), (Ketut, PM), (Ketut, S), (Putu, BD)\}$

Diagram panah



Tabel

A	B
Wayan	Kecerdasan Buatan
Made	Basis Data
Nyoman	-
Ketut	Pembelajaran Mesin
Ketut	Statistika
Putu	Basis Data

Matriks

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f \\ g \\ h \\ i \\ j \\ k \end{matrix}$$

- ▶ *a*: Wayan
- ▶ *b*: Made
- ▶ *c*: Nyoman
- ▶ *d*: Ketut
- ▶ *e*: Putu

- ▶ *k*: Matematika Diskrit
- ▶ *g*: Kecerdasan Buatan
- ▶ *h*: Pembelajaran Mesin
- ▶ *i*: Basis Data
- ▶ *j*: Statistika
- ▶ *k*: Pemrograman

Graf berarah

Catatan: *diskusi lanjut tentang graf akan dibahas pada bab "Graf".*

Sebuah **graf** adalah struktur matematis yang terdiri dari **titik** dan **garis**, dimana:

- ▶ Titik (simpul) merepresentasikan *objek*
- ▶ Garis (sisi) merepresentasikan *relasi*

Jika relasi berlaku satu arah, maka digunakan **garis berarah** atau **busur (arc)**, dan graf-nya disebut dengan **graf berarah (directed graph)**.

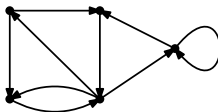


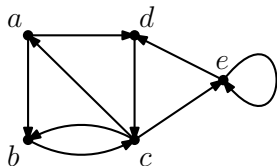
Figure: Contoh graf berarah

Graf untuk menggambarkan relasi antar objek

Graf berarah *hanya* digunakan untuk menggambarkan relasi pada sebuah himpunan (bukan antar himpunan).

- ▶ Simpul menggambarkan elemen himpunan, misal a dan b .
- ▶ Busur menggambarkan relasi, misal $(a, b) \in R$ digambarkan dengan busur dari a ke b .
 - ▶ Simpul a disebut **simpul asal** (*initial vertex*)
 - ▶ Simpul b disebut **simpul tujuan** (*terminal vertex*)
- ▶ Relasi $(a, a) \in R$ digambarkan dengan garis berarah dari a ke a , yang disebut **gelang** (*loop*).
- ▶ Relasi $(a, b) \neq (b, a)$ di R , dan digambarkan dengan garis berarah menghubungkan a dan b , dengan arah berlawanan.

Contoh relasi pada graf berarah



Graf di atas menggambarkan relasi:

$$R = \{(a, b), (a, d), (b, c), (c, a), (c, b), (c, e), (d, c), (e, d), (e, e)\}$$

Latihan

Definisikan sebuah relasi pada \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , dan \mathbb{R} , kemudian nyatakan relasi tersebut dengan menggunakan:

1. Himpunan pasangan berurutan
2. Diagram panah
3. Tabel
4. Matriks
5. Graf berarah

Bagian 4: Sifat relasi

Sifat-sifat relasi

1. Refleksif
2. Transitif
3. Simetris
4. Anti-simetris

Sifat refleksif

Relasi R pada himpunan A disebut **refleksif** jika

$$(a, a) \in R \text{ untuk setiap } a \in A$$

Jika $\exists a \in A$ sedemikian sehingga $(a, a) \notin R$, maka relasi dikatakan **tidak refleksif**.

Contoh

1. Relasi “habis membagi” pada \mathbb{Z}^+ adalah relasi refleksif, karena $\forall a \in \mathbb{Z}^+$, berlaku a habis membagi a .
2. Relasi berikut bukan relasi refleksif, dapatkah Anda jelaskan mengapa?
 - ▶ relasi “lebih dari” pada \mathbb{N}
 - ▶ relasi “habis membagi” pada \mathbb{Z}
 - ▶ relasi $x + y = 3$ pada \mathbb{Z}

Quiz

Bagaimanakah bentuk matriks biner pada relasi yang memiliki sifat refleksif?

Matriks pada relasi dengan sifat rekursif memiliki elemen diagonal utama yang bernilai 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

Sifat transitif

Relasi R pada himpunan A disebut **transitif** jika berlaku:

$$(a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$$

Contoh

Relasi “kurang dari” pada \mathbb{R} adalah relasi transitif:

Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$

yang berarti $(a, b), (b, c), (a, c) \in R$

Dapatkah Anda menyebutkan contoh lain dari relasi transitif?

Bagaimana dengan relasi berikut (transitif/tidak):

- ▶ $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$
- ▶ $R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}$

Contoh lain relasi transitif

- ▶ Relasi yang hanya terdiri dari satu elemen, misalnya:
 $R = \{(a, b)\}$.
- ▶ Relasi yang semua elemennya adalah pasangan terurut (a, a) , misalnya: $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.
- ▶ Relasi yang tidak memuat elemen a, b, c sedemikian sehingga $(a, b), (b, c) \in R$, misalnya: $R = \{(1, 2), (3, 4)\}$.

Quiz

- ▶ Dapatkah Anda menyebutkan ciri khusus dari matriks representasi dari relasi transitif?

Jawaban: tidak ada ciri khusus

- ▶ Bagaimanakah ciri khusus dari sifat transitif pada representasi graf berarah?

Jawaban: jika ada busur dari a ke b dan b ke c , maka juga terdapat busur berarah dari a ke c .

Sifat simetris

Relasi R pada himpunan A dikatakan **simetris** jika berlaku:

$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R, \forall a, b, \in A$$

Relasi R dikatakan **tak-simetris** jika:

$$\exists (a, b) \in R \ni (b, a) \notin R$$

Contoh

1. Relasi " $a + b = 0$ untuk $a, b \in \mathbb{R}$ " bersifat simetris, karena:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = 0 \Rightarrow b + a = 0$$

2. Relasi " $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}^+$ untuk $a, b \in \mathbb{Z}$ " bersifat tak-simetris, karena:

$$\text{Untuk } (4, 2), \text{ berlaku } \frac{4}{2} \in \mathbb{Z} \text{ tetapi } \frac{2}{4} \notin \mathbb{Z}^+$$

Sifat anti-simetris

Relasi R disebut **anti-simetris** jika:

$$((a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R) \Rightarrow (a = b) \text{ untuk } a, b \in A$$

(berarti bahwa $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a)$ terjadi hanya jika $a = b$)

Relasi R dikatakan **tak-anti-simetris** jika:

$$\exists (a, b) \in R, a \neq b \Rightarrow \exists (b, a) \in R$$

Contoh

1. Relasi " $\frac{a}{b} = 1$ untuk $a, b \in \mathbb{Z}^+$ " bersifat anti-simetris.
Mengapa?
2. Relasi " $a - b < 2$ untuk $a, b \in \mathbb{Z}$ " bersifat tak-anti-simetris.
Mengapa?

Untuk $(4, 3)$, berlaku $4 - 3 < 2$ dan $3 - 4 < 2$, tetapi $4 \neq 3$

Quiz

1. Bagaimanakah sifat relasi $\sqrt[2]{\frac{a}{b}} \in \mathbb{Q}$?

Relasi $\sqrt[2]{\frac{a}{b}} \in \mathbb{Q}$ untuk $a, b \in \mathbb{Z}\mathbb{Z}^+$ bersifat simetris, karena:

$$\sqrt[2]{\frac{a}{b}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt[2]{\frac{b}{a}} \in \mathbb{Q}$$

2. Apakah relasi yang tak-anti-simetris adalah relasi yang simetris? Jelaskan!

Tidak, contohnya: “relasi a, b, c dengan $a \neq b \neq c$, didefinisikan oleh $\{(a, b), (b, c), (c, b)\}$ ” bersifat:

- ▶ tak-anti-simetris, karena $(b, c), (c, b) \in R$ padahal $b \neq c$
- ▶ tak simetris, karena $(a, b) \in R$ tetapi $(b, a) \notin R$

Quiz

1. Bagaimanakah bentuk matriks biner dan graf berarah dari relasi simetris?

Jawaban:

- ▶ Matriks biner berbentuk matriks simetri ($A_{ij} = 1$ jika dan hanya jika $A_{ji} = 1$)
- ▶ Pada graf berarah, jika terdapat busur dari a ke b , maka terdapat busur dari b ke a .

2. Bagaimanakah bentuk matriks biner dan graf berarah dari relasi tak-simetris?

Jawaban:

- ▶ Matriks biner berbentuk matriks asimetri ($A_{ij} = 1$ jika dan hanya jika $A_{ji} = 0$)
- ▶ Pada graf berarah, jika terdapat busur dari a ke b , maka tidak ada busur dari b ke a . Jadi, tidak ada dua busur pada arah berlawanan yang menghubungkan dua simpul berbeda

Latihan Himpunan

1. Berikan dua contoh himpunan dengan ± 10 elemen, dan terapkan operasi himpunan (gabungan, irisan, komplemen, himpunan bagian).
2. Pada halaman 34, diberikan tabel tentang “Identitas Himpunan”. Berikan contoh yang menunjukkan bahwa sifat-sifat tersebut berlaku (satu contoh untk setiap *law*, sehingga akan ada 10 contoh).
3. Berikan contoh penerapan prinsip inklusi-eksklusi dengan tiga himpunan.

Latihan Relasi

Berikan sebuah contoh relasi yang bersifat:

1. Refleksif
2. Transitif
3. Simetris
4. Tak-simetris
5. Refleksif tetapi tidak transitif
6. Transitif tetapi tidak refleksif
7. Anti-simetris
8. Tak anti-simetris
9. Simetris tetapi tak anti-simetris
10. Tak simetris dan tak-anti-simetris