Matematika Diskrit

[KOMS119602] - 2022/2023

2 - Teori Himpunan

Dewi Sintiari

Prodi D4 Teknologi Rekayasa Perangkat Lunak
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 7-11 February 2022

Bagian 1: Himpunan

Himpunan

Himpunan adalah kumpulan dari objek tertentu yang memiliki **definisi yang jelas** dan dianggap sebagai satu kesatuan.

Objek di dalam himpunan disebut elemen, unsur, atau anggota.

Contoh

- *Himpunan: kumpulan hewan berkaki 4, kumpulan alat tulis*
- *Bukan himpunan: kumpulan orang cantik, kumpulan lukisan yang bagus*

Himpunan semesta adalah himpunan yang berisikan semua anggota atau objek yang sedang menjadi pembahasan atau dibicarakan.

Contoh himpunan yang terkait dengan Ilmu Komputer

1. Himpunan bilangan kompleks ($\mathbb{C}$), himpunan bilangan riil ($\mathbb{R}$), himpunan bilangan bulat ($\mathbb{Z}$), himpunan bilangan asli ($\mathbb{N}$), dsb.
2. ...
3. ...

Aturan dalam representasi himpunan

- $\{a, b, c, d, e\} \rightarrow$ Himpunan
- $\{a, b, b, c, d, d, d, e, f\} = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $\{a, b, b, c, d, d, d, e, f\} \rightarrow$ merupakan himpunan ganda (*multi-set*); terdapat elemen yang berulang (ganda)

Urutan penulisan elemen di dalam himpunan tidak penting.
Contoh: $\{a, b, c, d, e\} = \{b, a, d, e, c\}$

Catatan: pada himpunan, tidak harus ada korelasi antar elemen di dalam himpunan tersebut.

Penyajian himpunan - Enumerasi

Enumerasi adalah penyajian himpunan dengan cara mendaftarkan semua elemennya secara rinci. Biasanya digunakan notasi kurung kurawal ($\{\ \}$).

Contoh

A adalah himpunan bilangan positif genap yang kurang dari 10. Maka $A = \{2, 4, 6, 8\}$.

Penyajian himpunan - Notasi pembentuk himpunan

Himpunan dapat dinyatakan dengan menuliskan syarat keanggotaan himpunan.

Sebuah himpunan seringkali dinyatakan sebagai:

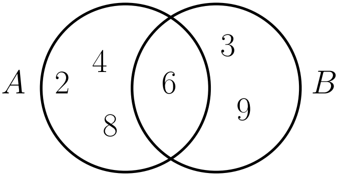
$$\{x \mid \text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x\}$$

Contoh

$A = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 < x < 5\}$

Penyajian himpunan - Diagram Venn

Diagram Venn adalah penyajian himpunan dengan diagram, dimana setiap himpunan digambarkan sebagai lingkaran, dan himpunan semesta digambarkan dengan segi empat.



Keanggotaan himpunan

Notasi berikut digunakan:

- $x \in A$: x merupakan anggota himpunan A
- $x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A

Contoh

Jika $A = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 < x < 5\}$, *Maka:*

- $4 \in A$
- $5 \notin A$

Notasi himpunan

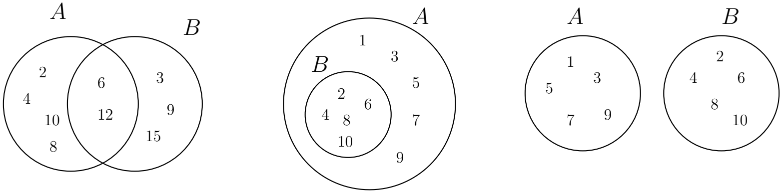
Beberapa notasi umum/baku terkait himpunan:

- $\mathbb{N}$ = himpunan bilangan asli (*natural number*) $= \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z}$ = himpunan bilangan bulat (*integer*) $=$ $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Z}^+$ = himpunan bilangan bulat positif (*positive integer*) $=$ $\{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Q}$ = himpunan bilangan rasional $= \{\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}\}$
- $\mathbb{R}$ = himpunan bilangan riil
- $\mathbb{C}$ = himpunan bilangan kompleks $= \{a + bi | a, b, \in \mathbb{R}\}$

Himpunan semesta (universal), dilambangkan dengan U atau S.

Diagram Venn

Diagram Venn adalah diagram yang menampilkan korelasi atau hubungan antarhimpunan.



$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
$B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

$A = \{x | x \in N, x \leq 10\}$
$B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Kardinalitas

Kardinalitas suatu himpunan A adalah banyaknya elemen pada himpunan A, yang dinotasikan dengan $n(A)$ atau $|A|$.

Contoh

Himpunan $A = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 < x < 5\}$ *memiliki kardinalitas 4.*

Bagian 2: Klasifikasi himpunan

Himpunan kosong (*null set*)

Himpunan kosong adalah himpunan yang kardinalitasnya 0, atau tidak memuat elemen, yang dinotasikan dengan $\emptyset$ atau $\{\ \}$.

Contoh

1. $\{x | x \in \mathbb{N}, x < 0\}$
2. $A =$ *himpunan mahasiswa D4 TRPL semester 3 yang tidak ingin lulus mata kuliah Matematika Diskrit*
3. $\{x | x$ *adalah akar dari persamaan kuadarat* $x^2 + 1 = 0\}$

Catatan:

- Himpunan $\{\emptyset\}$ atau $\{\{\}\}$ bukan himpunan kosong karena memiliki sebuah elemen.

Himpunan bagian (*subset*)

Sebuah himpunan A merupakan himpunan bagian atau *subset* dari himpunan B jika A "termuat" dalam B.

A subset B dinotasikan dengan $A \subseteq B$ (dibaca: "A subset B" atau "A adalah himpunan bagian dari B").

Dalam hal ini, dikatakan "B adalah superset dari A, dinotasikan dengan $B \supseteq A$.

Secara formal:

$$A \subseteq B \ \text{ jika } \ \forall x \ (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Contoh himpunan bagian

Contoh

- $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z}$ *atau* $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ *keduanya benar*
- $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

Permasalahan

Diberikan himpunan:

$$A = \{(x, y) \mid x + y < 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$
$$B = \{(x, y) \mid 2x + y < 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

Apakah $A \subseteq B$, *atau* $B \subseteq A$, *atau tidak keduanya?*

Himpunan bagian sejati dan tak-sejati

Catatan:

- Untuk sebarang himpunan A, berlaku:

$$\emptyset \subseteq A \text{ dan } A \subseteq A$$

$\emptyset$ dan A dikatakan himpunan bagian tak-sejati dari A.

Jika B adalah himpunan bagian dari A, dan $B \neq \emptyset$ serta $B \neq A$, maka B dikatakan sebgai himpunan sejati dari A.

Jika $A \subseteq B$ tetapi $A \neq B$, maka dapat ditulis $A \subset B$. Jika kita ingin menekankan bahwa $A \neq B$, maka ditulis $A \subsetneq B$. Dalam hal ini berarti, B adalah himpunan bagian sejati dari A.

Jadi, $A \subseteq B$ mengindikasikan bahwa ada **kemungkinan** $A = B$.

Latihan 1

Diberikan himpunan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d, e\}$.

Tentukan semua himpunan C sedemikian sehingga $A \subset B$ dan $C \subset B$.

Latihan 1

Diberikan himpunan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d, e\}$.

Tentukan semua himpunan C sedemikian sehingga $A \subset B$ dan $C \subset B$.

Solusi:

Dalam hal ini, A adalah himpunan sejati dari C, dan C adalah himpunan sejati dari B. Sehingga, C harus memuat semua elemen A dan memuat setidaknya satu elemen dari B, namun $C \neq B$ sehingga C memuat 4 elemen.

Jadi, $C = \{a, b, c, d\}$ atau $C = \{a, b, c, e\}$.

Latihan 2

Selidiki kebenaran identitas berikut:

$$\text{Jika } A \subseteq B, \text{ dan } B \subseteq C, \text{ maka } A \subseteq C$$

Solusi:

Misal $x \in A$

- Karena $A \subseteq B$, maka $x \in B$.
- Karena $B \subseteq C$, maka $x \in C$.

Jadi, $x \in A \Rightarrow x \in C$. Dengan demikian,

$$A \subseteq C$$

Himpunan sama

Dua himpunan dikatakan sama jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A.

Dalam hal ini $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ dan } B \subseteq A$$

Himpunan ekuivalen

Himpunan A dan B dikatakan ekuivalen jika dan hanya jika $|A| = |B|$. Kondisi ini dinotasikan dengan $A \sim B$.

Contoh

Misalkan $A = \{a, b, c, d, e\}$ *dan* $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$*. Maka* $A \sim B$*.*

Himpunan saling lepas

Himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memuat elemen yang sama. Kondisi ini dinotasikan dengan $A//B$.

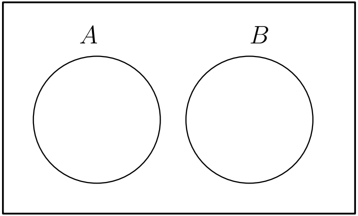


Figure: Dua himpunan yang saling lepas

Himpunan kuasa

Diberikan suatu himpunan A, himpunan kuasa (*power set*) dari A adalah himpunan yang elemen-elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A.

Himpunan kuasa dari A dinotasikan dengan: P(A) atau 2^A.

Dengan demikian, $|2^A| = 2^{|A|}$.

Contoh

Jika $A = \{a, b\}$, *maka:* $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

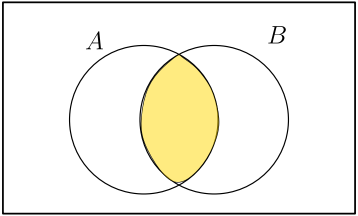
Dapat diperhatikan bahwa $|A| = 2$ *dan* $|2^A| = 2^{|A|} = 2^2 = 4$.

Bagian 3: Operasi himpunan

Irisan (*intersection*)

Irisan dari dua himpunan A dan B adalah himpunan yang semua elemennya termuat di dalam himpunan A dan B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$$



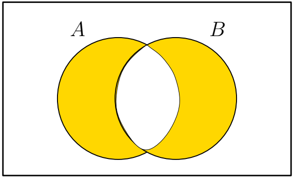
Contoh

Diberikan $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ *dan* $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$.
Maka $A \cap B = \{3, 9, 15\}$.

Gabungan (*union*)

Irisan dari dua himpunan A dan B adalah himpunan yang semua elemennya termuat di dalam himpunan A **atau** B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$$



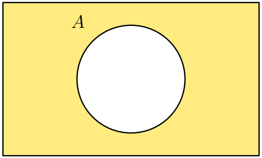
Contoh

Diberikan $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *dan* $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. *Maka* $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Komplemen (*complement*)

Komplemen dari suatu himpunan A adalah himpunan yang anggotanya termuat di U (himpunan semesta), namun tidak termuat di A. Komplemen dari A dinotasikan dengan A^C atau $\overline{A}$.

$$A^C = \{x \mid x \in U,\ x \notin A\}$$



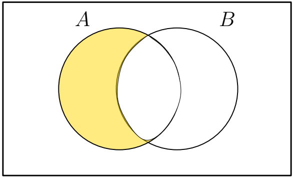
Contoh

Diberikan $U = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \leq 10\}$ *dan* $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. *Maka* $A^C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Selisih (*difference*)

Selisih dari himpunan A oleh B adalah himpunan yang anggotanya termuat di dalam himpunan A tapi tidak termuat di B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$$



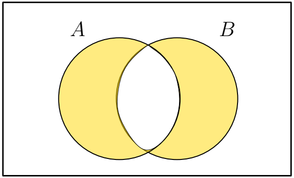
Contoh

Diberikan $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *dan* $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. *Maka* $A - B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Beda simetris (*symmetric difference*)

Beda simetris dari himpunan A dan B adalah himpunan yang elemennya termuat di A atau B, dan tidak termuat di $A \cap B$ (i.e., elemnnya atermuat di $A - B$ atau $B - A$.

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$



Contoh

Diberikan $A = \{2, 4, 6\}$ *dan* $B = \{4, 8, 12\}$*. Maka* $A \oplus B = \{2, 6, 8, 12\}$*.*

Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

Diberikan dua himpunan A dan B. Hasil kali kartesian dari A dan B adalah himpunan yang elemennya semua pasangan berurutan (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, \ b, \in B\}$$

Contoh

1. *Diberikan* $A = \{1, 2\}$ *dan* $B = \{a, b, c\}$. *Maka:*

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

2. *Diberikan* A *dan* B *adalah himpunan bilangan riil* $\mathbb{R}$, *maka* $A \times B$ *adalah semua titik pada bidang datar (sitem koordinat Kartesius dua dimensi).*

Sifat perkalian Kartesian

- Kardinalitas: $|A \times B| = |A| \times |B|$.
- Elemen adalah **pasangan berurutan**: $(a, b) \neq (b, a)$.
- Jika $A \neq \emptyset$ atau $B \neq \emptyset$, berlaku: $A \times B \neq B \times A$.
- Jika $A \neq \emptyset$ atau $B \neq \emptyset$, maka $A \times B = B \times A = \emptyset$.
- Perkalian Kartesian dari dua (atau lebih) himpunan:

  $$A_1 \times A_2 \times \cdot \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, \text{ for } 1 \leq i \leq n\}$$

Contoh

Diberikan dua himpunan:

$$A = \text{himpunan makanan} = \{b = bakso, c = capcay, m = mie\ ayam\}$$
$$B = \text{himpunan minuman} = \{a = air\ mineral, j = es\ jeruk, t = teh\}$$

Tentukan banyaknya kombinasi makanan dan minuman yang dapat dibentuk dari himpunan tersebut.

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 3 \times 3 = 9$$

$$A \times B = \{(b, a), (b, j), (b, t), (c, a), (c, j), (c, t), (m, a), (m, j), (m, t)\}$$

Notasi

Notasi perampatan operasi himpunan:

- $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$
- $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$
- $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \times i = 1^n A_i$
- $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n = \oplus_{i=1}^{n} A_i$

Latihan: Pembuktian sifat himpunan

Buktikan kebenaran sifat himpunan berikut (pilih salah satu).

TABLE 1 **Set Identities.**

Identity	*Name*
$A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$	Identity laws
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Domination laws
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Idempotent laws
$\overline{(\overline{A})} = A$	Complementation law
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Commutative laws
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Associative laws
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributive laws
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	De Morgan's laws
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Absorption laws
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	Complement laws

Bagian 4: Prinsip dualitas pada himpunan

Prinsip dualitas pada himpunan

Definisi

Misalkan S adalah suatu identitas himpunan yang memuat operasi komplemen, irisan, dan gabungan.

Jika S^* diperoleh dengan mensubstitusi:

- $\cup \to \cap$;
- $\cap \to \cup$;
- $\emptyset \to U$; *dan*
- $U \to \emptyset$,

maka $S*$ juga merupakan identitas himpunan, dan dinamakan sebgai dual dari S.

Latihan

Nyatakan dual dari identitas berikut:

1. $A \cup (B \cap A)) = A$
2. $A \cup ((B^C \cup A) \cap B)^C = U$
3. $(A \cup B^C)^C \cap B = A^C \cap B$
4. $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n)$
5. $(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)$.

Bagian 5: Prinsip inklusi dan ekslusi

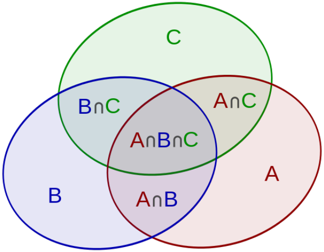
Prinsip inklusi dan ekslusi

Prinsip inklusi-eksklusi adalah teknik pencacahan yang memperumum sifat berikut:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Untuk tiga himpunan, perumumannya adalah:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



Contoh penerapan prinsip inklusi-eksklusi (1)

Soal 1: Tentukan banyaknya bilangan di antara 1-100 yang merupakan kelipatan 2 *atau* 3 (sumber: `https://brilliant.org/`).

Contoh penerapan prinsip inklusi-eksklusi (1)

Soal 1: Tentukan banyaknya bilangan di antara 1-100 yang merupakan kelipatan 2 *atau* 3 (sumber: `https://brilliant.org/`).

Solusi:

- Misalkan A adalah himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 100 yang merupakan kelipatan 2, maka $|A| = 50$.
- Misalkan B adalah himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 100 yang merupakan kelipatan 3, maka $|B| = 33$.
- Maka, $A \cap B$ adalah himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 100 yang merupakan kelipatan 2 dan 3, dan karenanya merupakan kelipatan 6, menyiratkan $|A \cap B| = 16$.

Contoh penerapan prinsip inklusi-eksklusi (1)

Soal 2: Terdapat tiga pilihan UKM olahraga di kampus: catur, karate, dan voli. Setiap mahasiswa mengikuti setidaknya satu dari UKM tersebut. Dan jumlah mahasiswa di kampus tersebut adalah 1000. Misalkan diberikan data sebagai berikut:

- Jumlah siswa yang mengikuti catur adalah 310.
- Jumlah siswa yang mengikuti karate adalah 650.
- Jumlah siswa yang mengikuti voli adalah 440 orang.
- Jumlah siswa yang mengikuti catur dan karate adalah 170.
- Jumlah siswa yang mengikuti catur dan voli adalah 150.
- Jumlah siswa yang mengikuti karate dan voli adalah 180.

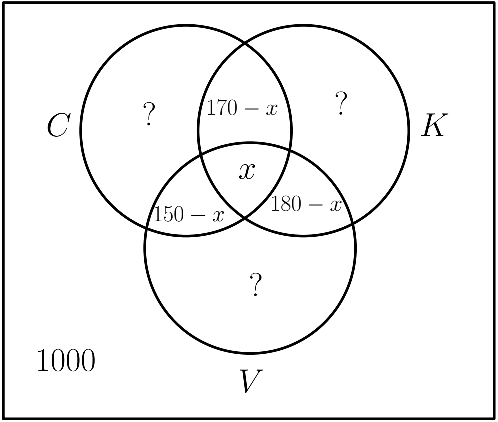
Gambarlah diagram Venn dari kondisi di atas, disertai dengan jumlah mahasiswa pada setiap himpunan terkait.

Solusi soal 2

Misal: C = himpunan mahasiswa yang mengikuti catur, K = himpunan mahasiswa yang mengikuti karate, dan V = himpunan mahasiswa yang mengikuti voli.

- $|C \cup K \cup V| = 1000$
- $|C| = 310$
- $|K| = 650$
- $|V| = 440$
- $|C \cap K| = 170$
- $|C \cap V| = 150$
- $|K \cap V| = 180$
- $|C \cap K \cap V| = x$

Solusi soal 2 (lanjutan)



Lengkapi bagian yang diisi tanda "?", kemudian tentukan nilai x.

Dapatkah Anda jelaskan relasi **gabungan** dan **irisan** di antara himpunan-himpunan pada kedua contoh tersebut?

Untuk **dua** himpunan:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

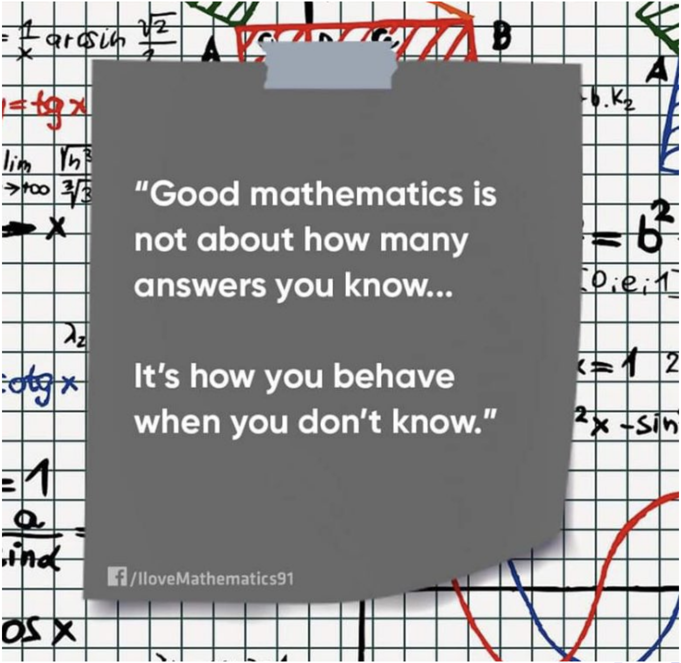
Untuk **tiga** himpunan:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Bagaimana dengan 4 himpunan? 5 himpunan?, dst...?

Tahapan penghitungan kardinalitas dari gabungan n himpunan

1. Sertakan kardinalitas setiap himpunan.
2. Kecualikan kardinalitas dari irisan dua himpunan.
3. Sertakan kardinalitas dari irisan tiga himpunan.
4. Kecualikan kardinalitas dari irisan empat himpunan.
5. Sertakan kardinalitas dari irisan lima himpunan.
6. Lanjutkan, sampai kardinalitas perpotongan n-tuplewise diperhitungkan (jika n ganjil) atau dikecualikan (n genap).


"Good mathematics is not about how many answers you know...

It's how you behave when you don't know."

/IloveMathematics91