

Matematika Diskrit
[KOMS119602] - 2022/2023

12.1. Graf (bagian 1)

Dewi Sintiar

Prodi D4 Teknologi Rekayasa Perangkat Lunak
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 13 (Desember 2022)

Graf

Contoh graf



Sejarah graf

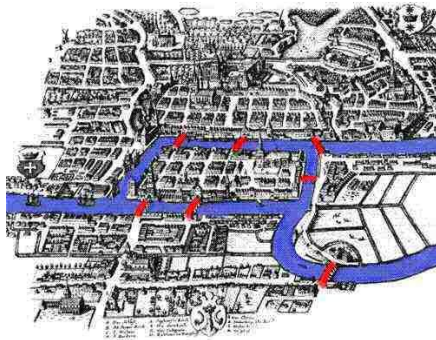


Figure: Permasalahan jembatan Königsberg

Permasalahan: bisakah seseorang mengunjungi setiap kota dengan melalui jembatan tepat satu kali, dan kembali ke titik awal?

Sejarah graf

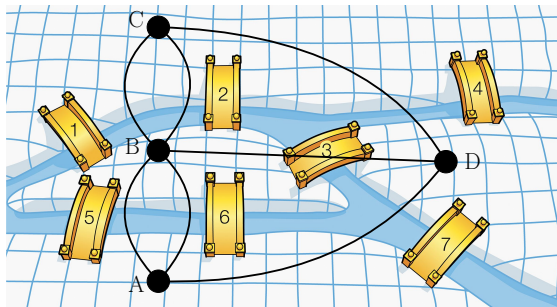
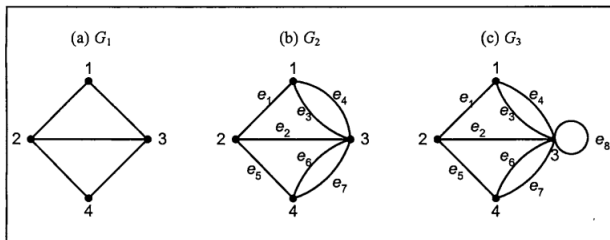


Figure: Solusi permasalahan jembatan Königsberg oleh Leonhard Euler

Notasi Graf

Graf $G = (V, E)$ memiliki dua komponen, yaitu:

- ▶ **Simpul/titik/verteks**, himpunannya dinotasikan dengan $V(G)$
- ▶ **Sisi**, himpunannya dinotasikan dengan $E(G)$



Latihan: Tentukan himpunan simpul dan himpunan sisi dari graf pada gambar di atas.

Jenis graf: graf sederhana dan tak-sederhana

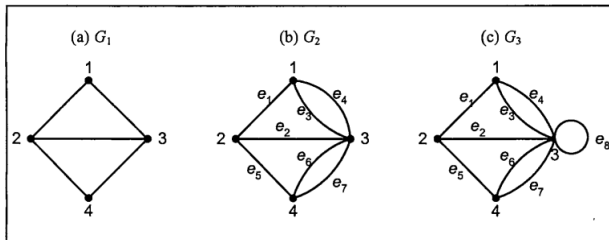


Figure: Graf sederhana (1) dan graf tak-sederhana (2 dan 3)

Contoh permasalahan pada graf sederhana

Contoh permasalahan: misalnya pada pencarian jalur terpendek antar-kota

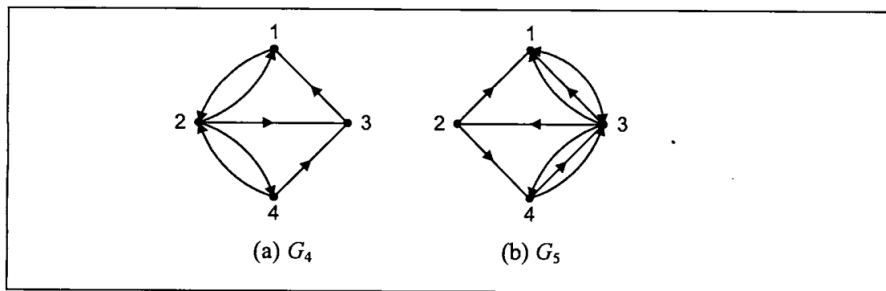
- ▶ setiap kota dilambangkan dengan simpul graf;
- ▶ dua simpul dihubungkan oleh sebuah sisi jika terdapat jalan yang menghubungkan kedua kota tersebut.

Pemodelan menggunakan graf sederhana misalnya pada skenario bahwa setiap kota dihubungkan oleh paling banyak satu jalan.

Contoh permasalahan pada graf tak-sederhana

Pemodelan seperti pada slide sebelumnya, namun beberapa kota mungkin terhubung dengan lebih dari satu jalan langsung.

Jenis graf: graf berarah dan tak berarah



Tugas:

Buatlah tabel jenis-jenis graf beserta karakteristik sisi-sisinya.

Contoh permasalahan pada graf berarah

Penjadwalan pesawat:

- ▶ Kota-kota (bandara) dijadikan sebagai simpul;
- ▶ Terdapat sebuah sisi berarah (busur) dari dua kota a ke b jika terdapat penerbangan dengan asal a ke tujuan b .

Contoh permasalahan:

- ▶ Sisi-sisi pada graf memiliki bobot yang sebanding dengan banyaknya kru pesawat yang bertugas.
- ▶ Pencarian jalur dengan total bobot minimal yang mengunjungi setiap kota yang menjadi destinasi meminimisasi jumlah kru yang dibutuhkan.

Contoh permasalahan pada graf tak-berarah

Contoh serupa dengan contoh yang diberikan sebelumnya.

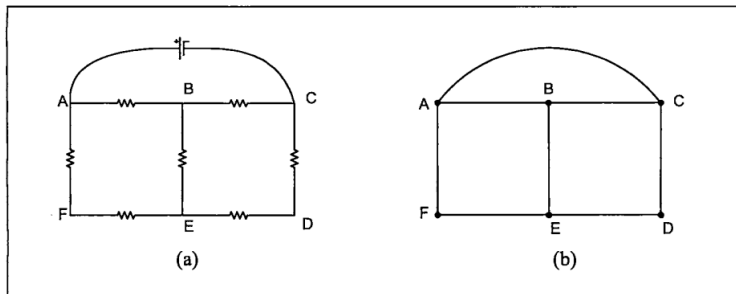
Latihan

Rangkumlah karakteristik dari jenis-jenis graf: sederhana, tak sederhana, berarah, dan tak berarah.

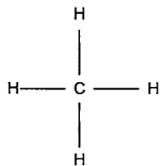


Aplikasi Teori Graf

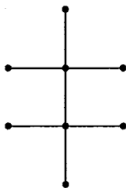
Aplikasi graf 1: Rangkaian listrik



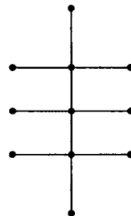
Aplikasi graf 2: Isomer senyawa kimia karbon



metana (CH₄)

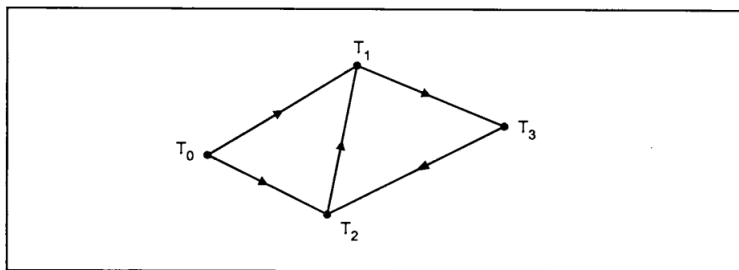


etana (C₂H₆)



propana (C₃H₈)

Aplikasi graf 3: Transaksi konkuren pada basis data terpusat



- ▶ Transaksi T_0 menunggu transaksi T_1 dan T_2 ;
- ▶ Transaksi T_2 menunggu transaksi T_1 ;
- ▶ Transaksi T_1 menunggu transaksi T_3 ;
- ▶ Transaksi T_3 menunggu transaksi T_2 ;

Aplikasi graf 4: Turnamen *Round-Robin*

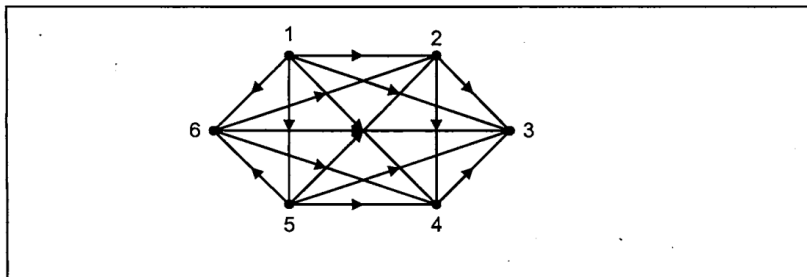


Figure: Turnamen *Round-Robin* untuk 6 tim. Busur (a, b) berarti tim a berhasil memukul tim b .

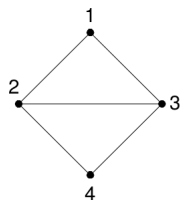
Terminologi graf

Terminologi dDasar

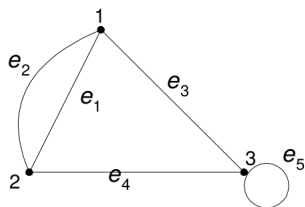
1. Bertetangga (*adjacent*)
2. Bersisian (*incident*)
3. Simpul terpencil (*isolated vertex*)
4. Graf kosong (*null graph* atau *empty graph*)
5. Derajat (*degree*)

Ketetanggaan (*adjacency*)

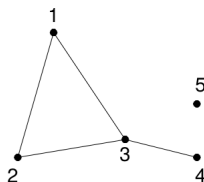
Dua simpul dikatakan **bertetangga** jika keduanya terhubung langsung oleh sebuah sisi.



G_1



G_2

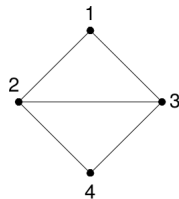


G_3

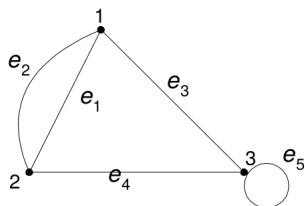
Insensi

Misal $e = (v_1, v_2)$ adalah sisi pada graf. Maka dikatakan bahwa:

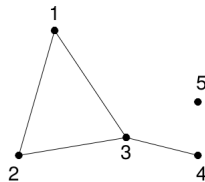
- ▶ e berisisian dengan v_1 ; dan
- ▶ e berisisian dengan v_2 .



G_1



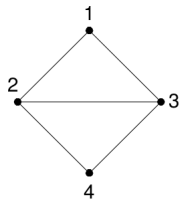
G_2



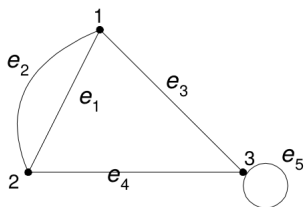
G_3

Simpul terpencil (*isolated vertex*)

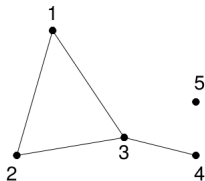
Sebuah simpul dikatakan **terpencil** (*isolated*) jika tidak ada sisi yang bersisian dengannya.



G_1



G_2



G_3

Graf kosong (*null graph*)

Graf yang tidak memiliki sisi.

Dengan kata lain, semua simpulnya merupakan simpul terencil.



$n=2$



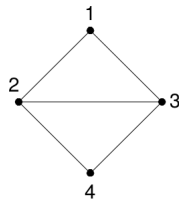
$n=3$



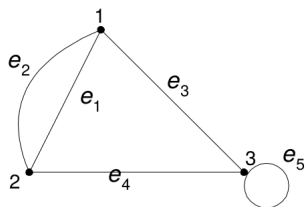
$n=4$

Derajat simpul (*degree*)

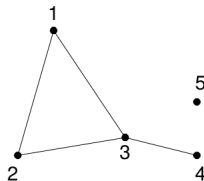
Derajat dari suatu simpul adalah banyaknya sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.



G_1

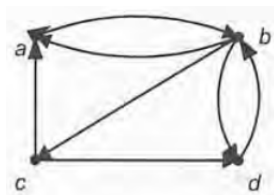


G_2



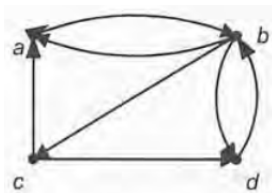
G_3

Derajat simpul (*degree*)



Permasalahan terkait dengan derajat simpul

Latihan 1: derajat simpul pada graf berarah



Tentukan derajat dari setiap simpul pada graf tersebut.

Untuk setiap simpul pada graf:

- ▶ Derajat masuk (*in-degree*)
- ▶ Derajat keluar (*out-degree*)

Latihan 2: derajat simpul

Tunjukkan bahwa:

Lemma

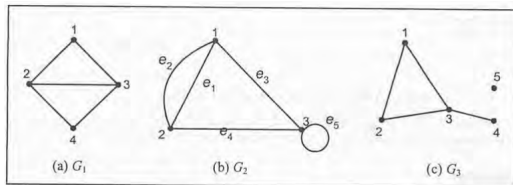
Untuk setiap graf G , banyaknya simpul berderajat ganjil selalu genap.

Lemma

Setiap graf $G = (V, E)$ memenuhi:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Ilustrasikan lemma tersebut pada graf berikut.



Komponen graf

Lintasan (*Path*)

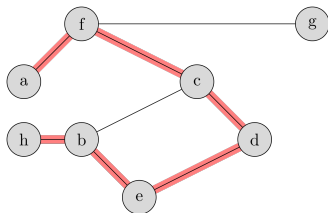
Lintasan dengan panjang n dari simpul awal v_0 ke simpul akhir v_n pada graf G adalah barisan simpul dan sisi yang terbentuk

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

sedemikian sehingga

$$e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$$

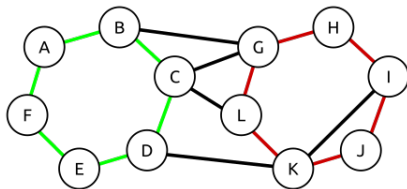
adalah sisi-sisi dari graf G .



Panjang lintasan adalah banyaknya sisi pada lintasan tersebut.

Siklus (*cycle*) atau sirkuit (*circuit*)

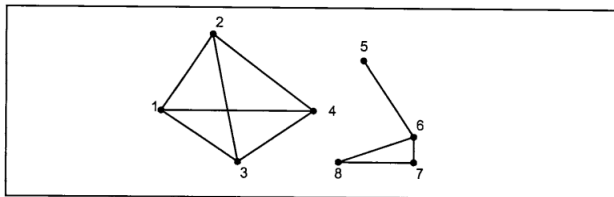
Siklus adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama.



Panjang sirkuit adalah banyaknya sisi pada lintasan tersebut.

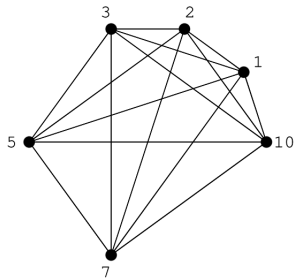
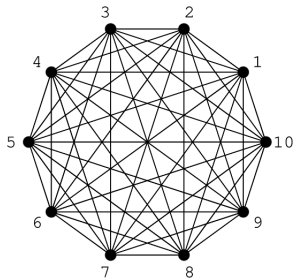
Konektivitas/keterhubungan (*connectivity*)

Sebuah graf G dikatakan **terhubung** jika untuk setiap simpul u dan v di G , terdapat lintasan yang menghubungkan u dan v .



Subgraf

Subgraf

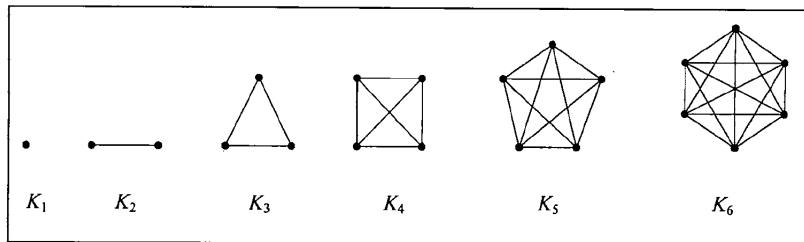


Permasalahan terkait subgraf

Beberapa contoh graf

Graf lengkap

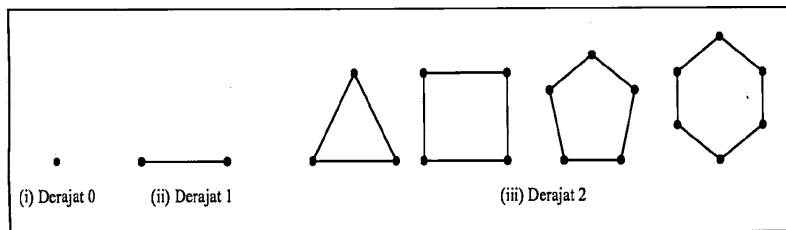
Graf **lengkap** adalah graf yang setiap pasang simpulnya dihubungkan oleh sebuah sisi.



Permasalahan terkait graf lengkap

Graf siklus

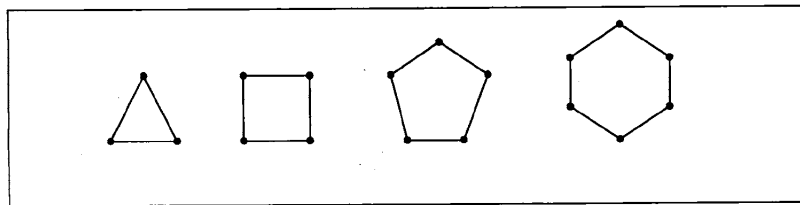
Graf **siklus** (*cycle*) adalah sebuah graf yang sisi-sisinya membentuk sebuah sirkuit.



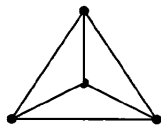
Permasalahan terkait graf siklus

Graf teratur (1)

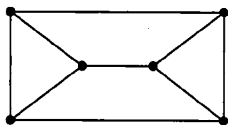
Sebuah graf dikatakan *teratur (regular)* jika setiap simpul pada graf tersebut memiliki derajat yang sama.



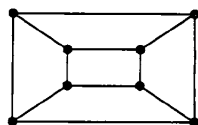
Graf teratur (2)



(i) $n = 4, r = 3$



(ii) $n = 6, r = 3$

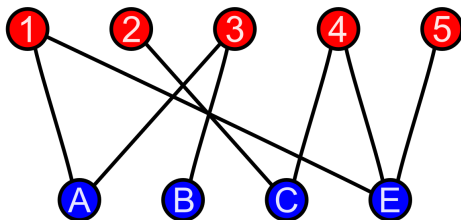


(iii) $n = 8, r = 3$

Permasalahan terkait graf teratur

Graf bipartit

Sebuah graf merupakan graf **bipartit** jika simpul-simpulnya dapat dipartisi menjadi dua sub-himpunan yang saling lepas (*disjoint* atau tidak beririsan), yaitu A dan B , dimana A dan B masing-masing tidak memuat sisi (dengan kata lain, A dan B adalah graf kosong).



Permasalahan terkait graf bipartit

Tugas

Pilihlah sebuah topik terkait dengan graf yang dibahas pada slide (misalnya graf teratur, derajat simpul, dsb.)

Carilah contoh penerapan konsep graf yang terkait dengan topik yang dipilih.