

## 3.3 - Algoritma *Brute Force* (bagian 3)

[KOMS124404]

Desain dan Analisis Algoritma (2024/2025)

Dewi Sintiar

Prodi S1 Ilmu Komputer  
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 4 (Maret 2025)

# Daftar isi

- Q and A (oral quiz)
- Selection sort
- Bubble sort
- Insertion sort
- Pembuktian kebenaran algoritma menggunakan invariansi loop (*loop invariant*)

## Tugas:

*Jawablah QnA berikut untuk mengecek pemahaman Anda!*

# Q n A

- 1 Dapatkah Anda jelaskan kelemahan algoritma *brute force*?
- 2 Dengan kelemahan tersebut, lalu mengapa algoritma *brute force* masih digunakan?
- 3 Jelaskan deskripsi masalah penugasan (*assignment problem*)!
- 4 Jelaskan deskripsi masalah partisi (*partition problem*)!
- 5 Jelaskan deskripsi masalah *magic square*!
- 6 Bagaimana teknik heuristik dapat membantu dalam meningkatkan efisiensi teknik brute-force untuk memecahkan masalah *magic square*?

# Bagian 1. Selection Sort

## Selection Sort (1): Algoritma

**Permasalahan:** Diberikan array dengan  $n$  elemen yang dapat diurutkan. Urutkan array dan tampilkan array yang diurutkan dalam urutan yang *tak-turun* (*non-descending*).

# Selection Sort (1): Algoritma

**Permasalahan:** Diberikan array dengan  $n$  elemen yang dapat diurutkan. Urutkan array dan tampilkan array yang diurutkan dalam urutan yang *tak-turun* (*non-descending*).

- 1 Temukan elemen terbesar  $x$  dalam interval  $[0..n - 1]$
- 2 Tukar  $x$  dengan elemen ke- $(n - 1)$
- 3 Kurangi  $n$  dengan 1 dan ulangi Langkah 1

## Selection Sort (2): Contoh

29	10	14	37	13
----	----	----	----	----

29	10	14	13	37
----	----	----	----	----

13	10	14	29	37
----	----	----	----	----

13	10	14	29	37
----	----	----	----	----

10	13	14	29	37
----	----	----	----	----

**37** is the largest, swap it with the last element, i.e. **13**.

How to find the largest?



Unsorted item



Largest item for the current iteration



Sorted item

## Selection Sort (3): Pseudocode

---

### Algorithm 1 Selection sort

---

```
1: procedure SELECTIONSORT( $A[0..n - 1]$ : sortable array)
2:   for  $i = n - 1$  downto 1 do
3:     maxIdx = i ▷ We'll find the correct elmt for position i
4:     for  $j = 0$  to  $i - 1$  do
5:       if  $a[j] \geq a[\text{maxIdx}]$  then
6:         maxIdx = j ▷ Iteratively choose a larger elmt for position i
7:       end if
8:     end for
9:     swap( $a[i]$ ,  $a[\text{maxIdx}]$ ) ▷ the correct elmt at position i is found at index maxIdx
10:  end for
11: end procedure
```

---



## Selection Sort (4): Algoritma versi kedua (*by minimum*)

Coba Anda bandingkan algoritma sebelumnya dengan algoritma Selection Sort berikut. Analisis perbedaannya!

**ALGORITHM** *SelectionSort*( $A[0..n - 1]$ )

//Sorts a given array by selection sort

//Input: An array  $A[0..n - 1]$  of orderable elements

//Output: Array  $A[0..n - 1]$  sorted in nondecreasing order

**for**  $i \leftarrow 0$  **to**  $n - 2$  **do**

$min \leftarrow i$

**for**  $j \leftarrow i + 1$  **to**  $n - 1$  **do**

**if**  $A[j] < A[min]$   $min \leftarrow j$

    swap  $A[i]$  and  $A[min]$

Figure: Algoritma Selection sort pada buku Anany Levitin

# Selection Sort (5): Analisis kompleksitas

## Number of executions

---

**Algorithm 1** Selection sort

---

```
1: procedure SELECTIONSORT( $A[1..n]$ )
2:   for  $i = n - 1$  downto 1 do           ←  $n-1$ 
3:      $\text{maxIdx} = i$ 
4:     for  $j = 0$  to  $i - 1$  do           ←  $n-1$ 
5:       if  $a[j] \geq a[\text{maxIdx}]$  then     ←  $(n-1) + (n-2) + \dots + 1$ 
6:          $\text{maxIdx} = j$                    ←  $= n(n-1) / 2$ 
7:       end if
8:     end for
9:      $\text{swap}(a[i], a[\text{maxIdx}])$          ←  $n-1$ 
10:  end for
11: end procedure
```

---

Kompleksitas waktu:  $O(n^2)$  *Dapatkan Anda jelaskan mengapa?*

# Bagian 2. Bubble Sort

# Bubble Sort (1): Algoritma

**Idea:** Diberikan sebuah array dengan  $n$  elemen

- 1 Bandingkan sepasang elemen yang berdekatan
- 2 Tukar jika elemen tidak dalam urutan yang benar
- 3 Ulangi sampai akhir array
  - ▶ Elemen terbesar akan berada di posisi terakhir
- 4 Kurangi  $n$  dengan 1 dan lanjutkan ke Langkah 1

# Bubble Sort (2): Contoh

(a) Pass 1

29	10	14	37	13
10	29	14	37	13
10	14	29	37	13
10	14	29	37	13
10	14	29	13	37

At the end of **Pass 1**, the largest item **37** is at the last position

(b) Pass 2

10	14	29	13	37
10	14	29	13	37
10	14	29	13	37
10	14	13	29	37

At the end of **Pass 2**, the second-largest item **29** is at the second last position

## Bubble Sort (3)

Apakah algoritma berikut juga merupakan bubble-sort? Jelaskan!

```
ALGORITHM BubbleSort( $A[0..n - 1]$ )  
  //Sorts a given array by bubble sort  
  //Input: An array  $A[0..n - 1]$  of orderable elements  
  //Output: Array  $A[0..n - 1]$  sorted in nondecreasing order  
  for  $i \leftarrow 0$  to  $n - 2$  do  
    for  $j \leftarrow 0$  to  $n - 2 - i$  do  
      if  $A[j + 1] < A[j]$  swap  $A[j]$  and  $A[j + 1]$ 
```

source: book of Levitin

## Bubble Sort (4): Pseudocode

---

### Algorithm 2 Bubble sort

---

```
1: procedure BUBBLESORT( $A[0..n - 1]$ )
2:   for  $i = n - 1$  downto 1 do
3:     for  $j = 1$  to  $i$  do
4:       if  $a[j - 1] > a[j]$  then
5:         swap( $a[j]$ ,  $a[j - 1]$ )
6:       end if
7:     end for
8:   end for
9: end procedure
```

▷ Compare adjacent pairs of elements

▷ Swap if the elements are **not** in correct order

## Bubble Sort (5): Analisis kompleksitas

- Satu iterasi dari loop dalam (“if condition” dan “swap”) membutuhkan waktu konstan (memiliki batas atas  $c$ ).
- Untuk dua loop bersarang:
  - ▶ *Outer loop* (loop luar): memuat  $n$  iterasi
  - ▶ *Inner loop* (loop dalam):
    - ★ ketika  $i = 0$ , terdapat  $(n - 1)$  iterasi
    - ★ ketika  $i = 1$ , terdapat  $(n - 2)$  iterasi
    - ★ ...
    - ★ ketika  $i = n - 1$ , terdapat 0 iterasi
- Jumlah total iterasi:  $0 + 1 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$
- Total waktu eksekusi:  $c \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \mathcal{O}(n^2)$



## Bubble Sort (6): Algoritma (*version 2*)

---

### Algorithm 3 Bubble sort version 2

---

```
1: procedure BUBBLESORT2( $A[1..n]$ )
2:   for  $i = n - 1$  downto 1 do
3:     sorted = True
4:     for  $j = 1$  to  $i$  do
5:       if  $a[j - 1] > a[j]$  then
6:         swap( $a[j]$ ,  $a[j - 1]$ )
7:         sorted = False
8:       end if
9:     end for
10:    if (sorted) then
11:      return
12:    end if
13:  end for
14: end procedure
```

---

## Bubble Sort (7): Analisis kompleksitas (*version 2*)

- Kasus terburuk (*worst-case*)
  - ▶ Terjadi jika input dalam urutan menurun (*descending*)
  - ▶ Kompleksitas waktu terburuk:  $\mathcal{O}(n^2)$
- Kasus terbaik (*best-case*)
  - ▶ Terjadi jika input sudah dalam urutan naik (*ascending*)
  - ▶ Algoritma memberikan output setelah iterasi luar tunggal (tidak perlu melalui loop dalam)
  - ▶ Kompleksitas waktu terbaik:  $\mathcal{O}(n)$

# Bagian 3. Insertion Sort

## Insertion sort (1): Algoritma

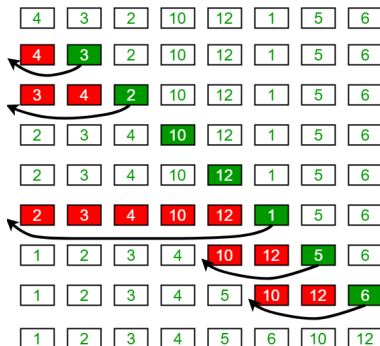
Untuk mengurutkan array  $A[0..n - 1]$  dengan ukuran  $n$  dalam urutan naik (*ascending*):

- 1 Ulangi langkah berikut mulai dari  $A[0]$  sampai dengan  $A[n - 1]$  sepanjang array.
- 2 Bandingkan elemen saat ini (dinamai sebagai 'kunci') dengan pendahulunya (elemen sebelumnya).
- 3 Jika elemen kunci kurang dari pendahulunya, bandingkan dengan elemen pendahulu sebelumnya. Pindahkan elemen yang lebih besar satu posisi ke atas untuk memberi ruang bagi elemen yang ditukar.

## Insertion sort (2): Contoh

Berikut adalah ilustrasi contoh penerapan algoritma Selection Sort. Pelajari dengan seksama, dan pahami setiap langkahnya.

Insertion Sort Execution Example



source: <https://www.geeksforgeeks.org/insertion-sort>

## Insertion sort (3): Pseudocode

---

### Algorithm 4 Insertion sort

---

```
1: procedure INSERTIONSORT( $A[0..n - 1]$ : orderable array)
2:    $i \leftarrow 1$ 
3:   while  $i < n$  do
4:      $key \leftarrow A[i]$ 
5:      $j \leftarrow i - 1$ 
6:     while  $j \geq 0$  and  $A[j] > key$  do
7:        $A[j + 1] \leftarrow A[j]$ 
8:        $j \leftarrow j - 1$ 
9:     end while
10:     $A[j + 1] \leftarrow key$ 
11:     $i \leftarrow i + 1$ 
12:  end while
13: end procedure
```

▷ We'll find the correct position for  $A[1], A[2], \dots, A[n - 1]$

▷ 'key' is the current element that will be inserted

▷ Using index  $j$ , we'll find the correct position for  $A[i]$

▷  $A[j]$  is shifted one position to the right (to index  $j + 1$ )

▷ Decrement  $j$  (until the correct position is found)

▷ Once found, 'key' is inserted in the correct position (at idx  $j + 1$ )

▷ Increment  $i$  to work on the next 'key'

---

## Insertion sort (4): Kompleksitas waktu

**Kompleksitas:**  $\mathcal{O}(n^2)$  (karena ada dua loop *while* bersarang, masing-masing dengan kompleksitas  $\mathcal{O}(n)$ )

---

### Algorithm 5 Insertion sort

---

```
1: procedure INSERTIONSORT( $A[0..n - 1]$ : sortable array)
2:    $i \leftarrow 1$ 
3:   while  $i < n$  do ▷ 'while loop' involves  $(n - 1)$  iterations
4:      $key \leftarrow A[i]$ 
5:      $j \leftarrow i - 1$ 
6:     while  $j \geq 0$  and  $A[j] > key$  do ▷ In the worst case:  $\exists (n - 1)$  iterations
7:        $A[j + 1] \leftarrow A[j]$ 
8:        $j \leftarrow j - 1$ 
9:     end while
10:     $A[j + 1] \leftarrow key$ 
11:     $i \leftarrow i + 1$ 
12:  end while
13: end procedure
```

# Bagian 4. Pembuktian kebenaran dengan invariansi loop (*loop invariant*)



# Membuktikan kebenaran melalui loop invarian

- Ingat kembali definisi **kebenaran** algoritma:  
*algoritma dikatakan benar apabila algoritma memberikan return/output/solusi yang benar untuk setiap instance yang valid*
- Cara standar untuk membuktikan kebenaran adalah dengan memeriksa **karakteristik invariansi loop**

## Karakteristik invariansi loop:

- Yakni merupakan **sifat kunci** dari data yang dimanipulasi oleh loop utama dari sebuah algoritma
  - ▶ Karakteristik harus didefinisikan dan dapat membantu kita memahami mengapa algoritma itu benar
  - ▶ Kita harus menunjukkan bahwa **karakteristik tersebut berlaku pada kasus awal, dipertahankan pada setiap iterasi, dan ketika perulangan berakhir, memberikan output yang benar**
- Menentukan karakteristik ini secara umum bisa jadi sulit. Namun dalam banyak algoritma, karakteristik invariansi loop seringkali menjadi kunci yang menentukan fitur dari algoritma.

# Keterkaitan invariansi loop dengan kebenaran algoritma (1)

## Tiga karakteristik utama dari invariansi loop

1. **Inisialisasi:** Invariansi loop harus benar sebelum iterasi pertama dari loop.
2. **Maintenance:** Jika sifat berlaku sebelum iterasi dari loop, maka sifat tersebut harus tetap berlaku setelah iterasi selesai.
3. **Termination:** Saat loop berakhir, invarian menyediakan sifat berguna yang membantu menunjukkan bahwa algoritma sudah benar.

## Keterkaitan invariansi loop dengan kebenaran algoritma (2)

- Untuk membuktikan kebenarannya, kita harus membuktikan hal di atas tentang sifat invarian loop.
- *Karakteristik (1) dan (2) mirip dengan induksi.* Jika invariansi loop berlaku, maka invariansi loop benar **sebelum** eksekusi dari setiap iterasi loop.
- *Karakteristik (3) membedakan invariansi loop dengan induksi* dan merupakan bagian yang paling penting.
  - ▶ Kita tidak menunjukkan bahwa invariansi loop harus berlaku pada *ad infinitum* (i.e., untuk  $n \rightarrow \infty$ );
  - ▶ melainkan menghasilkan jawaban yang benar setelah sejumlah langkah terbatas (untuk nilai  $n \geq n_0$  pada suatu batas  $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ ).

# Lanjutan bagian 4. Contoh pembuktian kebenaran dengan invariansi loop

# 1. Kebenaran selection sort dengan invariansi loop (1)

## Contoh invariansi loop (*in* SELECTIONSORT)

---

```
1: procedure SELECTIONSORT( $A[0..n-1]$ : orodable array)
2:   for  $i = n - 1$  downto 1 do
3:     maxIdx = i
4:     for  $j = 0$  to  $i - 1$  do
5:       if  $a[j] \geq a[\text{maxIdx}]$  then
6:         maxIdx = j
7:       end if
8:     end for
9:     swap( $a[i]$ ,  $a[\text{maxIdx}]$ )
10:  end for
11: end procedure
```

---

**Invariansi loop.** Di awal setiap iterasi dari loop terluar:

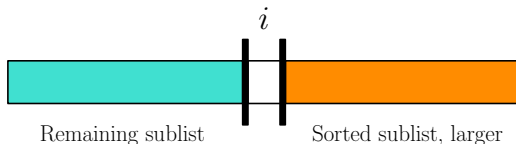
- Sublist  $A[0..i]$  berisi  $(i + 1)$  elemen yang tersisa. Tujuan kita adalah untuk menempatkan elemen yang benar pada posisi  $i$ .
- Sublist  $A[i + 1..n - 1]$  terdiri dari  $(n - 1 - i)$  elemen terbesar  $A$  dalam urutan yang benar (terurut).

# 1. Kebenaran algoritma Selection Sort: Invariansi loop (2)

Pada dasarnya, invariansi loop menyatakan bahwa pada setiap langkah, array dapat dibagi menjadi dua bagian:

- Bagian *dari  $i$  ke kiri* adalah sublist yang masih dikerjakan oleh algoritma
- Bagian *di sebelah kanan  $i$*  adalah sublist yang sudah diurutkan dari elemen di  $A$

**Loop invariant.** At the start of each iteration of the outermost loop, the sublist  $A[i+1..n-1]$  consists of the  $n-1-i$  largest elements of  $A$  in the correct order. The sublist  $A[0..i]$  contains the remaining  $i+1$  elements. Our goal is to put the correct element at position  $i$ .



# 1. Kebenaran selection sort dengan invariansi loop (3)

## Rangkuman pembuktian dengan invariansi loop pada Selection Sort

- “Selection” berarti mengambil daftar elemen yang tidak diurutkan dan mengurutkannya berdasarkan nilai.
- Kita menunjukkan bahwa algoritma SELECTIONSORT mempertahankan sifat berikut pada setiap langkah:  
*elemen pada sebelah kanan indeks utama berada dalam urutan terurut dan bernilai lebih dari (atau sama dengan) elemen manapun yang terletak di sebelah kiri indeks utama.*
- Jika sifat ini berlaku saat inialisasi, dipertahankan pada setiap langkah, dan diakhiri dengan jawaban yang benar, maka dapat disimpulkan bahwa SELECTIONSORT merupakan algoritma pengurutan yang **benar**, sesuai dengan prinsip invariansi loop.

## 2. Kebenaran BUBBLESORT and INSERTIONSORT?

### Latihan:

- Apakah bukti “invariansi loop” di atas dapat diterapkan untuk algoritma SELECTION SORT yang diberikan pada buku Anany Levitin?
- Coba Anda buktikan kebenaran BUBBLESORT dan INSERTION SORT! dengan menggunakan teknik invariansi loop!
- Apakah metode “invariansi loop” dapat diaplikasikan untuk BUBBLESORT dan INSERTION SORT? Jika iya, jelaskan invariansi loop untuk setiap algoritma!



# Lampiran 1: Pseudocode Selection Sort

---

## Algorithm 6 Selection sort

---

```
1: procedure SELECTIONSORT
2:   Input: array  $A[0..n - 1]$ : yang dapat diurutkan
3:   Output: array yang terurut ascending
4:   for  $i \leftarrow 0$  to  $n - 2$  do
5:      $\text{min} \leftarrow i$ 
6:     for  $j \leftarrow i + 1$  to  $n - 1$  do
7:       if  $A[j] < A[\text{min}]$  then
8:          $\text{min} \leftarrow j$ 
9:       end if
10:    end for
11:    swap  $A[i]$  dan  $A[\text{min}]$ 
12:  end for
13: end procedure
```

---

## Lampiran 2: Pseudocode Bubble Sort

---

### Algorithm 7 Bubble sort

---

```
1: procedure BUBBLESORT
2:   Input: array  $A[0..n - 1]$ : yang dapat diurutkan
3:   Output: array yang terurut ascending
4:   for  $i \leftarrow 0$  to  $n - 2$  do
5:     for  $j \leftarrow 0$  to  $n - 2 - i$  do
6:       if  $A[j + 1] < A[j]$  then
7:         swap  $A[i]$  dan  $A[\min]$ 
8:       end if
9:     end for
10:  end for
11: end procedure
```

---

*end of slide...*