
EXERCISE 7.3: ADVANCED EXERCISE OF DIVIDE-AND-CONQUER STRATEGY

dikerjakan di rumah

Aturan pengerjaan tugas:

1. Buatlah kelompok diskusi beranggotakan 3 orang.
2. Kerjakan soal yang ada secara singkat, padat, dan jelas. Anda disarankan mengerjakan soal secara terurut, karena setiap soal terhubung satu sama lain dengan level pemahaman materi yang naik.
3. Tugas boleh diketik/ditulis tangan (pastikan bisa dibaca), boleh menggunakan Bahasa Indonesia/Inggris. Hindari menggunakan tinta merah. Jika menggunakan tulis tangan, harap discan (tidak difoto), kemudian dikompresi untuk memperkecil ukuran file. Tulis jawaban pada satu file pdf.
4. Tugas dikumpulkan dalam bentuk *hardcopy*.
5. Setiap anggota kelompok **wajib** memahami hasil diskusi dan solusi yang dituliskan oleh kelompoknya.
6. Di akhir perkuliahan, **setiap mahasiswa** wajib memberikan ulasan tentang hasil diskusi kelompoknya dalam bentuk video **mandiri (tidak berkelompok)** berdurasi ± 10 menit yang diunggah di Youtube. Ulasan memuat hasil diskusi kelompok, apa yang Anda pelajari, apa yang Anda tidak pahami, dan hal-hal lain yang Anda pandang perlu.

*Dengan ini, Anda menyatakan bahwa Anda siap menerima segala konsekuensi
jika nantinya ditemukan adanya kecurangan dalam pengerjaan tugas ini.*

1 Perkalian fungsi polinom

Dalam latihan ini, kita mengeksplorasi strategi divide-and-conquer untuk mengalikan dua polinom dengan derajat ¹ yang sama, yaitu n (ini mirip dengan “perkalian matriks” dan “perkalian bilangan besar” yang sudah dibahas sebelumnya).

1. (Algoritma naif untuk perkalian polinom)

Diberikan dua polinom berderajat n sebagai berikut. Tujuan kita adalah menghitung $A(x)B(x)$.

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$
$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

Cara naif untuk melakukan perkalian polinom adalah dengan *metode perkalian langsung*, seperti pada contoh berikut:

Contoh 1.1.

$$A(x) = 1 + 2x + 3x^2$$
$$B(x) = 3 + 2x + 2x^2$$

$$A(x)B(x) = (1 + 2x + 3x^2)(3 + 2x + 2x^2) = 3 + 8x + 15x^2 + 10x^3 + 6x^4$$

(a) Selesaikan perkalian polinom berikut menggunakan algoritma naif.

$$A(x) = 2 + 5x + 3x^2 + x^3 - x^4$$
$$B(x) = 1 + 2x + 2x^2 + 3x^3 + 6x^4$$

(b) Tulis pseudocode untuk algoritma naif untuk mengalikan dua polinom $A(x)$ dan $B(x)$ yang memiliki derajat n .

(c) Hitung kompleksitas algoritma naif Anda. Nyatakan dengan notasi asimtotik!

2. (Perkalian fungsi polinom dengan algoritma divide-and-conquer)

Diberikan dua polinom dengan derajat n sebagai berikut. Tujuan kita adalah menghitung $A(x)B(x)$.

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$
$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

Bagaimana kita melakukan perkalian polinom dengan Divide-and-Conquer? Algoritmanya adalah sebagai berikut.

- Partisi $A(x)$ menjadi $A_0(x)$ dan $A_1(x)$, masing-masing berisi $n/2$ suku:

$$A_0(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{\lceil n/2 \rceil - 1}x^{\lceil n/2 \rceil - 1}$$
$$A_1(x) = a_{\lceil n/2 \rceil} + a_{\lceil n/2 \rceil + 1}x + a_{\lceil n/2 \rceil + 2}x^2 + \dots + a_{n - \lceil n/2 \rceil}x^{n - \lceil n/2 \rceil}$$

Sehingga

$$A(x) = A_0(x) + A_1(x)x^{\lceil n/2 \rceil}$$

¹Derajat suatu polinom adalah pangkat tertinggi dari variabel pada suku-suku polinom tersebut (misa: polinom $3x^3 + 2x - 4$ memiliki derajat 3).

- Demikian pula, $B(x)$ dapat dipartisi menjadi $B_0(x)$ dan $B_1(x)$, sehingga:

$$B(x) = B_0(x) + B_1(x)x^{\lceil n/2 \rceil}$$

Dengan demikian:

$$A(x)B(x) = A_0(x)B_0(x) + (A_0(x)B_1(x) + A_1(x)B_0(x))x^{\lceil n/2 \rceil} + A_1(x)B_1(x)x^{2\lceil n/2 \rceil}$$

Tugas: Selesaikan perkalian polinom berikut menggunakan algoritma yang dijelaskan di atas. Tuliskan langkah-langkahnya dengan jelas!

$$A(x) = 2 + 5x + 3x^2 + x^3 - x^4$$

$$B(x) = 1 + 2x + 2x^2 + 3x^3 + 6x^4$$

3. (Pseudocode dan kompleksitas waktu algoritma perkalian polinom dengan DnC)

Algoritma divide-and-conquer yang dijelaskan pada pertanyaan 3 dapat ditulis dalam pseudocode sebagai berikut:

Algorithm 1 Polynomials multiplication (divide-and-conquer, version 1)

```

1: procedure POLYMUL( $A, B$ : polynomials,  $n$ : integer)
2:   declaration
3:      $A_0, A_1, B_0, B_1$ : polynomials
4:      $s$ : integer
5:   end declaration
6:   if  $n = 0$  then
7:     return  $A * B$  ▷ scalar multiplication
8:   else
9:      $s \leftarrow \lceil n/2 \rceil$ 
10:     $A_0 \leftarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{s-1}x^{s-1}$ 
11:     $A_1 \leftarrow a_sx^s + a_{s+1}x^{s+1} + a_{s+2}x^{s+2} + \dots + a_nx^{n-s}$ 
12:     $B_0 \leftarrow b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{s-1}x^{s-1}$ 
13:     $B_1 \leftarrow b_sx^s + b_{s+1}x^{s+1} + b_{s+2}x^{s+2} + \dots + b_nx^{n-s}$ 
14:    return POLYMUL( $A_0, B_0, s$ ) + POLYMUL( $A_0, B_1, s$ ) + POLYMUL( $A_1, B_0, s$ ) *  $x^s$  + POLYMUL( $A_1, B_1, s$ ) *  $x^{2s}$ 
15:   end if
16: end procedure

```

- Periksa apakah pseudocode tersebut sesuai dengan perhitungan matematis yang dijelaskan di pertanyaan 3.
- Tuliskan fungsi kompleksitas waktu dari algoritma divide-and-conquer pada pertanyaan 3 dalam rumus rekursif. Menggunakan Teorema Master, hitung kompleksitas waktu asimptotik!

4. (Perbaiki algoritma DnC untuk perkalian fungsi polinom)

Sekarang kita ingin memodifikasi algoritma divide-and-conquer untuk perkalian polinom yang diberikan pada pertanyaan 2. Kita akan mengurangi jumlah perkalian yang dilakukan dalam algoritma. Pada soal 2, kita mengetahui formula berikut:

$$A(x)B(x) = A_0(x)B_0(x) + (A_0(x)B_1(x) + A_1(x)B_0(x))x^{\lceil n/2 \rceil} + A_1(x)B_1(x)x^{2\lceil n/2 \rceil}$$

Terdapat 4 perkalian dan 3 penjumlahan polinom dengan derajat n . Kita akan mengurangi jumlah perkalian menjadi 3, tetapi dengan konsekuensi jumlah penjumlahan bertambah.

Definisikan:

$$\begin{aligned} Y(x) &= (A_0(x) + A_1(x)) \times (B_0(x) + B_1(x)) \\ U(x) &= A_0(x)B_0(x) \\ Z(x) &= A_1(x)B_1(x) \end{aligned}$$

Maka:

$$Y(x) - U(x) - Z(x) = A_0(x)B_1(x) + A_1(x)B_0(x)$$

sehingga:

$$\begin{aligned} A(x)B(x) &= A_0(x)B_0(x) + (A_0(x)B_1(x) + A_1(x)B_0(x))x^{\lceil n/2 \rceil} + A_1(x)B_1(x)x^{2\lceil n/2 \rceil} \\ &= U(x) + (Y(x) - U(x) - Z(x))x^{\lceil n/2 \rceil} + Z(x)x^{2\lceil n/2 \rceil} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa dalam algoritma ini, hanya ada tiga perkalian, yaitu $U(x)$, $Y(x)$, dan $Z(x)$.

Tugas: Selesaikan perkalian polinom berikut menggunakan algoritma yang dijelaskan di atas. Tuliskan langkah-langkahnya dengan jelas!

$$\begin{aligned} A(x) &= 2 + 5x + 3x^2 + x^3 - x^4 \\ B(x) &= 1 + 2x + 2x^2 + 3x^3 + 6x^4 \end{aligned}$$

5. (Pseudocode perbaikan algoritma DnC untuk perkalian fungsi polinom)

Algoritma divide-and-conquer yang dijelaskan pada pertanyaan 3 dapat ditulis dalam pseudocode sebagai berikut:

Algorithm 2 Polynomials multiplication (divide-and-conquer, version 2)

```

1: procedure POLYMUL2( $A, B$ : polynomials,  $n$ : integer)
2:   declaration
3:      $A_0, A_1, B_0, B_1, U, Y, Z$ : polynomials
4:      $s$ : integer
5:   end declaration
6:   if  $n = 0$  then
7:     return  $A * B$  ▷ scalar multiplication
8:   else
9:      $s \leftarrow \lceil n/2 \rceil$ 
10:     $A_0 \leftarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{s-1}x^{s-1}$ 
11:     $A_1 \leftarrow a_sx^s + a_{s+1}x^{s+1} + a_{s+2}x^{s+2} + \dots + a_nx^{n-s}$ 
12:     $B_0 \leftarrow b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{s-1}x^{s-1}$ 
13:     $B_1 \leftarrow b_sx^s + b_{s+1}x^{s+1} + b_{s+2}x^{s+2} + \dots + b_nx^{n-s}$ 
14:     $Y \leftarrow \text{POLYMUL2}(A_0 + A_1, B_0 + B_1, s)$ 
15:     $U \leftarrow \text{POLYMUL2}(A_0, B_0, s)$ 
16:     $Z \leftarrow \text{POLYMUL2}(A_1, B_1, s)$ 
17:    return  $U + (Y - U - Z) * x^s + Z * x^{2s}$ 
18:  end if
19: end procedure

```

Tugas: Selesaikan perkalian polinom berikut dengan algoritma POLYMUL2. Tuliskan langkah-langkahnya dengan jelas!

$$A(x) = 2 + 5x + 3x^2 + x^3 - x^4$$

$$B(x) = 1 + 2x + 2x^2 + 3x^3 + 6x^4$$

6. Setelah menghitung hasil $A(x)B(x)$, periksa apakah ketiga algoritma berbeda di atas memberikan hasil yang sama. Jika tidak, jelaskan alasannya!