

11 - Backtracking

[KOMS120403]

Desain dan Analisis Algoritma (2023/2024)

Dewi Sintiar

Prodi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 12 (May 2024)

Daftar isi

- Prinsip dasar Backtracking
- State-space tree dalam algoritma backtracking
- Masalah *n-Ratu*
- Masalah *Sirkuit Hamilton*
- Masalah *Subset-Sum*

Bagian 1. Prinsip dasar strategi *backtracking*

Prinsip dasar Backtracking

- Dengan teknik *exhaustive search*, kita mendaftar semua kandidat solusi, kemudian mengidentifikasi sebuah solusi yang memenuhi sifat tertentu yang diharapkan.
- Algoritma backtracking memberikan perbaikan pada exhaustive search.
- Dalam exhaustive search, semua kemungkinan solusi dieksplorasi dan dievaluasi satu per satu.
- Dalam backtracking, kita tidak memeriksa semua kemungkinan, hanya kemungkinan yang mengarah pada solusi. Simpul lain yang tidak mengarah ke solusi akan dipangkas.

Ide pokok:

Percabangan pada state-space tree dapat dipangkas segera setelah kita dapat menyimpulkan bahwa itu tidak dapat mengarah pada solusi.

Prinsip dasar Backtracking

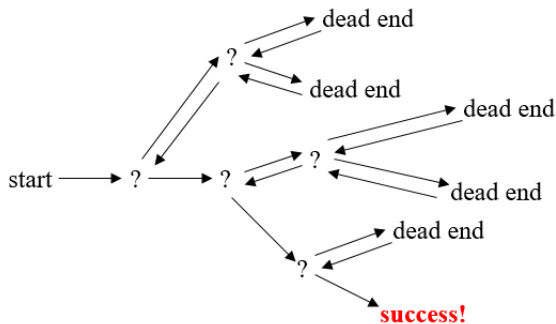


Figure: Ilustrasi algoritma backtracking (sumber: <https://miro.medium.com/>)

Representasi solusi

- **Representasi solusi:** sebuah output dapat dituliskan sebagai *n-tuple* (x_1, x_2, \dots, x_n) dimana setiap koordinat x_i adalah elemen dari beberapa “himpunan terbatas yang diurutkan secara linear (*finite linearly ordered set*)” (dilambangkan dengan S_i).
- **Tuples:** semua tupel solusi dapat memiliki panjang yang sama (misal pada masalah *n-queens* dan masalah *sirkuit Hamilton*) dan dapat pula memiliki panjang yang berbeda (misal pada masalah *subset-sum*).

Backtracking dalam DFS

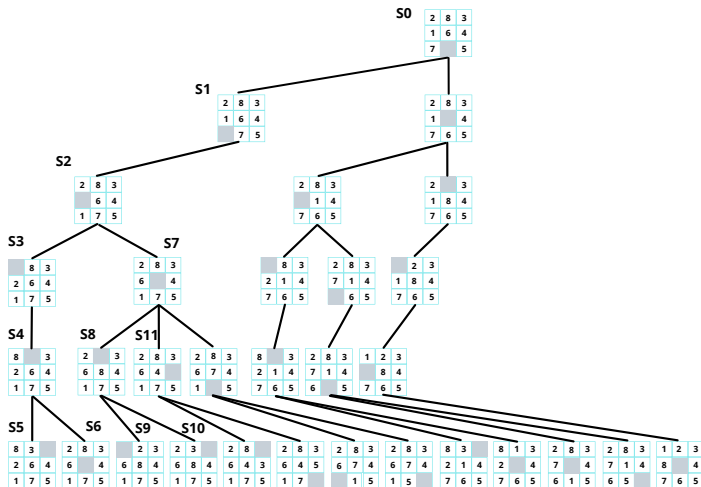
Backtracking dalam DFS digunakan dalam pencarian solusi masalah yang memiliki banyak kemungkinan penyelesaian.

Solusinya diperoleh dengan melihat pendekatan depth-first.

- Anda tidak memiliki cukup informasi untuk mengetahui langkah selanjutnya.
- Setiap keputusan mengarahkan Anda ke beberapa/banyak pilihan baru.
- Beberapa urutan pilihan mungkin menjadi solusi masalah.

Dalam DFS, backtracking digunakan sebagai cara metodologis untuk mencoba beberapa urutan keputusan.

Contoh backtracking dalam DFS



Bagian 2. State-space tree

State-space tree (1)

Backtracking dapat dilihat sebagai pencarian pada graf pohon, yang dimulai dari akar hingga ke daun (simpul solusi).

State-space tree

yakni merupakan graf pohon yang mewakili semua keadaan yang mungkin (solusi atau non-solusi) dari masalah, dari simpul akar (sebagai keadaan awal) ke simpul daun (sebagai keadaan terminal/akhir).

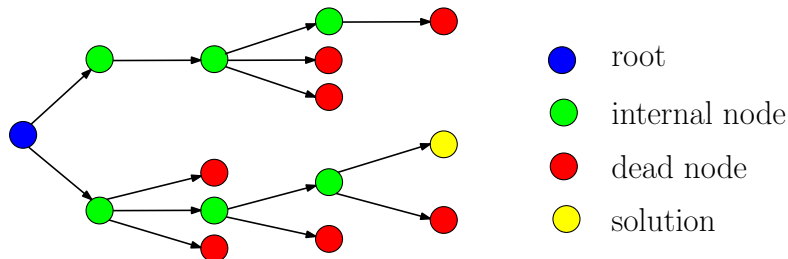
Sebuah algoritma backtracking menghasilkan (secara eksplisit atau implisit) **state-space tree**:

- simpulnya mewakili tupel yang dibangun sebagian oleh i koordinat pertama yang ditentukan oleh tindakan pada tahap sebelumnya;
- jika tupel (x_1, x_2, \dots, x_i) adalah kandidat solusi, maka algoritma menemukan elemen berikutnya dalam ruang S_{i+1} yang konsisten dengan nilai (x_1, x_2, \dots, x_i) dan fungsi kendala masalahnya, kemudian menambahkannya ke tupel sebagai koordinat yang ke- $(i + 1)$;
- jika tidak ada elemen yang bisa diambil di ruang S_{i+1} , algoritma mundur untuk mempertimbangkan nilai berikutnya dari x_i , dan demikian seterusnya.

State-space tree (2)

- Akar (*root*) mewakili keadaan awal sebelum pencarian dimulai;
- Simpul internal
 - ▶ simpul dari level pertama dalam pohon mewakili pilihan yang dibuat untuk komponen pertama dari solusi;
 - ▶ simpul tingkat kedua mewakili pilihan untuk komponen kedua;
 - ▶ dan seterusnya...;
- Simpul daun (*leaves*) mewakili jalan buntu yang tidak menjanjikan atau solusi lengkap yang ditemukan oleh algoritma.

State-space tree (3)



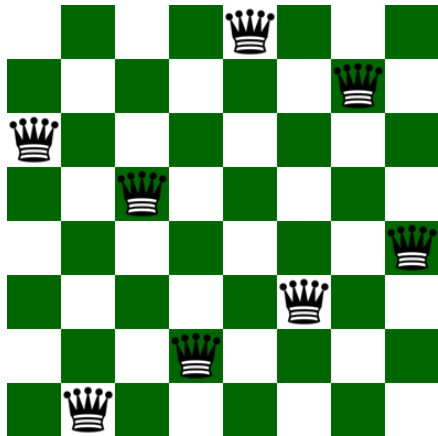
Tipe simpel state-space tree

- **Promising node**: sesuai dengan solusi yang dibangun sebagian yang mungkin masih mengarah pada solusi lengkap;
- **Non-promising node**: simpul mati (*dead node*)

State-space tree (4)

- Solusi dicari dengan membangkitkan **simpul status** (*state nodes*), sehingga menghasilkan lintasan dari akar ke daun;
- Untuk membangun simpul, aturan DFS diikuti;
- Simpul yang dihasilkan disebut **simpul aktif** (*live node*);
- Simpul aktif yang sedang diperluas disebut **simpul perluasan** (*expand-node*);
- Setiap kali expand-node diperluas, lintasan yang dihasilkan menjadi lebih panjang;
- Fungsi yang digunakan untuk “memangkas” sebuah expand-node disebut **bounding function**;
- Ketika sebuah simpul dimatikan, maka secara otomatis semua simpul anaknya akan dipangkas;
- Jika pembuatan jalur berakhir dengan simpul mati, maka dilakukan **runut balik** (*backtrack*) ke simpul induk;
- Simpul orang tua ini menjadi simpul perluasan baru;
- Pencarian dihentikan jika solusi ditemukan.

Bagian 3. n -Queens problem

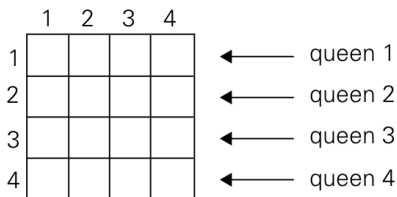


Masalah n -ratu (n -Queens problem)

Permasalahan

Tempatkan n ratu di papan catur berukuran $n \times n$, sehingga tidak ada dua ratu yang saling menyerang (dengan berada di baris yang sama, di kolom yang sama, atau di diagonal yang sama).

- Untuk $n = 1$, masalahnya memiliki solusi trivial
- Untuk $n = 2, 3$, masalah tidak memiliki solusi
- Bagaimana jika $n = 4$?



Algoritma

START

- 1 mulai dari kolom paling kiri
- 2 jika semua ratu ditempatkan, *return* `TRUE` atau `PRINT` konfigurasi
- 3 periksa semua baris di kolom saat ini
 - 1 jika ratu ditempatkan dengan aman, tandai baris dan kolom; dan secara rekursif periksa apakah kita mendekati konfigurasi saat ini, apakah kita mendapatkan solusi atau tidak
 - 2 jika penempatan menghasilkan solusi, kembalikan `TRUE`
 - 3 jika penempatan tidak menghasilkan solusi, pangkas tanda dan coba baris lain
- 4 jika semua baris dicoba dan solusi tidak diperoleh, *return* `FALSE` dan lakukan *backtrack*

END

Masalah n -Ratu

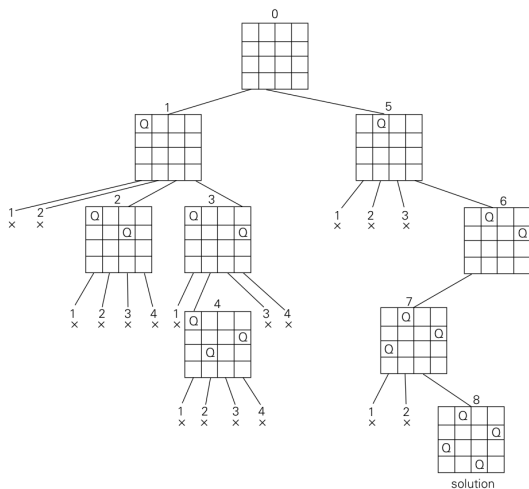


Figure: State-space tree untuk memecahkan masalah 4-ratu dengan backtracking. Tanda \times menunjukkan usaha yang gagal untuk menempatkan sebuah ratu di kolom yang ditunjukkan. Angka di atas simpul menunjukkan urutan pembangkitan simpul.

Masalah n -Ratu

- 1 Kita mulai dengan papan kosong dan kemudian tempatkan ratu 1 di posisi pertama yang mungkin dari barisnya, yaitu di kolom 1 dari baris 1.
- 2 Lalu kita tempatkan ratu 2, setelah gagal mencoba kolom 1 dan 2, di posisi pertama yang dapat diterima untuk itu, yaitu kuadrat $(2, 3)$, kuadrat di baris 2 dan kolom 3.
- 3 Ini terbukti menjadi jalan buntu karena tidak ada posisi yang dapat diterima untuk ratu 3.
- 4 Jadi, algoritma mundur dan menempatkan ratu 2 di posisi berikutnya yang memungkinkan di $(2, 4)$.
- 5 Kemudian ratu 3 ditempatkan di $(3, 2)$, yang terbukti menjadi jalan buntu lainnya.
- 6 Algoritma kemudian mundur ke ratu 1 dan memindahkannya ke $(1, 2)$.
- 7 Ratu 2 lalu pergi ke $(2, 4)$, ratu 3 menjadi $(3, 1)$, dan ratu 4 menjadi $(4, 3)$, yang merupakan solusi untuk masalah tersebut.

Bagian 4. Contoh permasalahan lain

Masalah sirkuit Hamilton

Permasalahan

Diberikan graf terhubung G , temukan sirkuit Hamilton di G . (Ingat bahwa sirkuit Hamilton adalah sirkuit yang mengunjungi semua simpul G tepat satu kali dan kembali ke titik awal.)

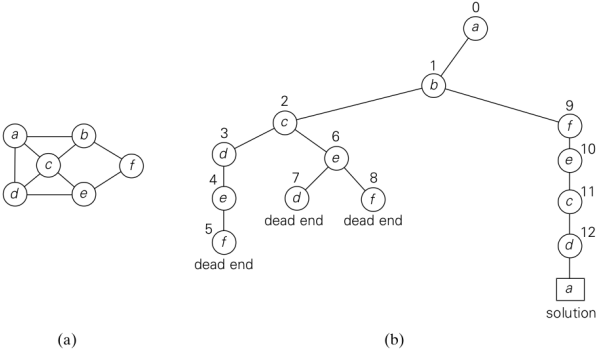


Figure: (a) Graf. (b) State-space tree untuk menemukan sirkuit Hamilton. Angka di atas simpul graf pohon menunjukkan urutan pembangkitan simpul.

Subset-sum problem (1)

Permasalahan

Diberikan suatu himpunan n bilangan bulat positif $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ dan bilangan bulat positif d . Temukan subhimpunan dari A yang jumlahnya sama dengan d .

Contoh 1: Diberikan $A = \{1, 2, 5, 6, 8\}$, $d = 9$, solusinya adalah: $\{1, 2, 6\}$ dan $\{1, 8\}$.

Contoh 2: Diberikan $A = \{3, 5, 6, 7\}$, $d = 15$, solusinya adalah: $\{3, 5, 7\}$.

Subset-sum problem (2)

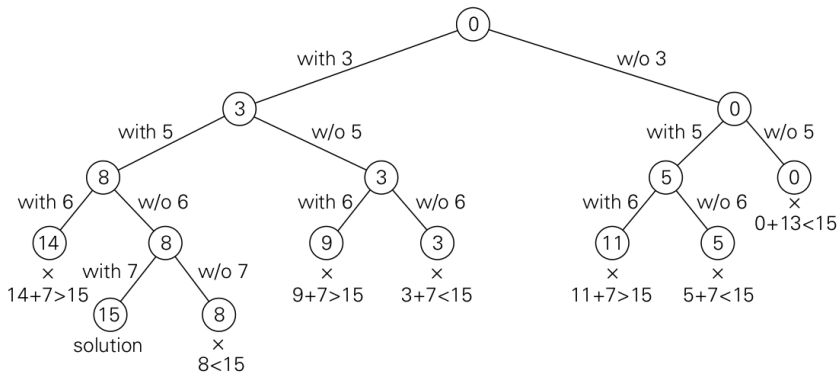


Figure: Pohon ruang-status lengkap dari algoritma backtracking yang diterapkan pada instance $A = \{3, 5, 6, 7\}$ dan $d = 15$ dari masalah Subset-sum. Angka di dalam sebuah simpul menunjukkan jumlah dari elemen yang sudah termasuk dalam himpunan bagian yang diwakili oleh simpul tersebut. Ketidaketaraan di bawah daun menunjukkan alasan penghentiannya (*prunning the node*).

Subset-sum problem (3)

Sebuah lintasan dari akar ke simpul pada level ke- i dari pohon menunjukkan i nomor pertama yang dimasukkan atau tidak dimasukkan dalam himpunan bagian yang diwakili oleh simpul tersebut.

Kita mencatat nilai s , jumlah dari angka-angka ini, pada simpul.

- Jika s sama dengan d , kita memiliki solusi untuk masalah tersebut. Kita dapat melaporkan hasil ini dan berhenti atau,
- Jika semua solusi perlu ditemukan, lanjutkan dengan menelusuri kembali ke simpul induk.
- Jika s tidak sama dengan d , kita dapat mengakhiri simpul sebagai tidak menjanjikan jika salah satu dari dua ketidaksetaraan berikut terpenuhi:

$$s + a_{i+1} > d \text{ (jumlah } s \text{ terlalu besar)}$$

$$s + \sum_{j=i+1}^n a_j < d \text{ (jumlah } s \text{ terlalu kecil)}$$

Bagian 5. Kerangka algoritma Backtracking

Kerangka algoritma backtracking

Algorithm 1 Backtracking

```
1: procedure BACKTRACK( $X[1..i]$ )
2:   input:  $X[1..i]$ : the first  $i$  promising components of a solution
3:   output: all the tuples representing the problem's solution
4:   if  $X[1..i]$  is a solution then
5:     write ( $X[1..i]$ )
6:   else
7:     for each  $x \in S_{i+1}$  consistent with  $X[1..i]$  and the constraints do
8:        $X[i + 1] \leftarrow x$ 
9:       BACKTRACK( $X[1..i + 1]$ )
10:    end for
11:  end if
12: end procedure
```

Kompleksitas waktu

Backtracking pada dasarnya adalah pencarian lengkap yang dilakukan di atas ruang pencarian. Jadi kompleksitas waktu dari algoritma backtracking **ditentukan oleh ukuran ruang pencarian.**

Misalnya, dalam masalah n -queens dan Hamiltonian, ukuran ruang pencarian adalah sekitar $\mathcal{O}(n!)$.

Secara intuitif, ratu pertama memiliki n penempatan, ratu kedua tidak boleh berada di kolom yang sama dengan yang pertama, sehingga ratu kedua memiliki kemungkinan $n - 1$, dan seterusnya, dengan kompleksitas waktu sebesar $\mathcal{O}(n!)$.

Kelebihan & kekurangan

Kelebihan

- Biasanya diterapkan pada masalah kombinatorial yang sulit dimana tidak ada algoritma yang efisien untuk menemukan solusi yang tepat.
- Berbeda dengan pendekatan pencarian lengkap, backtracking setidaknya memiliki harapan untuk menyelesaikan beberapa contoh ukuran tak-trivial dalam jumlah waktu yang dapat diterima (terutama untuk masalah optimasi).
- Bahkan jika backtracking tidak menghilangkan elemen apa pun dari ruang keadaan masalah dan akhirnya menghasilkan semua elemennya, ia menyediakan teknik khusus untuk melakukannya.

Kekurangan

- Backtracking **bukan** teknik yang efisien (walaupun berhasil diimplementasikan pada masalah sebelumnya).
- Pada kasus terburuk, mungkin harus menghasilkan semua kandidat yang mungkin dalam ruang keadaan masalah yang tumbuh secara eksponensial (atau lebih cepat).

end of slide...