Aljabar Linier
[KOMS120301] - 2023/2024

6.1 - Invers matriks

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 6 (Oktober 2023)

Tujuan pembelajaran

Setelah pembelajaran ini, dana diharapkan dapat:

1. menyelidiki apakah suatu matriks memiliki invers;
2. menghitung kebalikan dari matriks *berdimensi kecil* (jika ada);
3. menghitung kebalikan dari matriks $n \times n$ (jika ada);
4. menjelaskan konsep *minor*, *kofaktor*, *adjoin*;
5. menganalisis apakah suatu matriks ortogonal;
6. menganalisis jika suatu himpunan vektor ortonormal;
7. menjelaskan sifat-sifat invers matriks.

Bagian 1: Invers matriks

Invers

Matriks persegi A dikatakan invertible atau tak-singular jika $\exists B$ s.t.:

$$AB = BA = I \qquad \text{di mana } I \text{ adalah matriks identitas}$$

Catatan: Matriks B tunggal (tepat satu invers), dan disebut invers dari A, yang dilambangkan dengan A^{-1}.
Hubungan A dan B bersifat **simetris**:

> *Jika B adalah kebalikan dari A, maka A adalah kebalikan dari B, i.e.*
> $$(A^{-1})^{-1} = A$$

Contoh

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ *dan* $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ *Maka:*

$$AB = \begin{bmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mengapa kita perlu mencari invers suatu matriks?

1. ‘Pada dasarnya,“pembagian” tidak ada untuk matriks, sebagai gantinya, kita memiliki “kebalikan”.

   Diberikan matriks A dan B sedemikian rupa sehingga

   $$B = AX$$

   Bagaimana kita menemukan X? $\Rightarrow X = BA^{-1}$

2. Penerapan:
   - menyelesaikan sistem persamaan linier;
   - diaplikasikan dalam proses enkripsi/dekripsi kode pesan;
   - dll.

Bagaimana cara menghitung invers matriks 2×2?

$$\textit{Misalkan } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \textit{ apakah } A^{-1}\textit{?}$$

Misalkan $A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$. Maka:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solusi dari SPL:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 & = 1 \\ cx_1 + dy_1 & = 0 \end{cases} \quad \text{dan} \quad \begin{cases} ax_2 + by_2 & = 0 \\ cx_2 + dy_2 & = 1 \end{cases}$$

Invers matriks 2×2

Sehingga:

$$x_1 = \frac{d}{ad - bc}, \quad y_1 = \frac{-c}{ad - bc}, \quad x_2 = \frac{-b}{ad - bc}, \quad y_2 = \frac{a}{ad - bc}$$

Perhatikan bahwa $ad - bc = |A|$ (*determinan* dari A).

Ketika $|A| \neq 0$, nilai x_1, y_1, x_2, dan y_2 ada.

Maka,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/|A| & -b/|A| \\ -c/|A| & a/|A| \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Kesimpulan:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Ketika $|A| \neq 0$, invers dari matriks A (berukuran 2×2) dapat diperoleh dari A sebagai berikut:

1. Tukarkan dua elemen pada diagonal (a dan d);
2. Ambil negatif dari dua elemen lainnya (b dan c);
3. Kalikan matriks yang dihasilkan dengan $\frac{1}{|A|}$ atau, secara setara, bagi setiap elemen dengan $|A|$.

Catatan: Jika $|A| = 0$, maka A adalah tidak memiliki invers.

Contoh

Tentukan invers dari: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

Contoh

Tentukan invers dari: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

Solusi:

$$|A| = 2(5) - 3(4) = 10 - 12 = -2$$

Karena $|A| \neq 0$, maka A memiliki invers.

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, $|B| = 1(6) - 3(2) = 0$, jadi B tidak memiliki invers.

Bagian 2: Menghitung invers dari *adjoin*

Invers matriks berukuran $n \times n$

Note:

Jika A adalah matriks $n \times n$, A^{-1} dapat diperoleh seperti di atas, dengan mencari solusi dari persamaan sistem linier $n \times n$.

Hal ini tidak begitu praktis untuk diselesaikan dengan menggunakan metode substitusi/eliminasi. Metodenya akan dibahas kemudian.

Review tentang minor dan kofaktor

Misalkan $A = [a_{ij}]$ menjadi matriks persegi n.

Definisikan M_{ij} sebagai matriks $(n-1)$-persegi yang diperoleh dari A dengan menghapus baris ke-i dan kolom ke-j dari A.

minor dari elemen a_{ij} dari A didefinisikan sebagai:

$$\text{minor}(A) = \det(M_{ij})$$

kofaktor dari a_{ij} didefinisikan sebagai signed minor dari a_{ij}, dan dilambangkan dengan:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$$

Adjoin

Kita dapat membentuk matriks kofaktor

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

dimana C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}.

adjoin matriks A didefinisikan sebagai:

$$\text{adj}(A) = C^T$$

Contoh adjoin

Diberikan matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh adjoin

Diberikan matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Solusi:

Kofaktor dari A adalah:

- $C_{11} = 12$
- $C_{12} = 6$
- $C_{13} = -16$
- $C_{21} = 4$
- $C_{22} = 2$
- $C_{23} = 16$
- $C_{31} = 12$
- $C_{13} = -10$
- $C_{33} = 16$

Matriks kofaktor dan adjoin A adalah:

$$C = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix} \qquad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Invers matriks dari adjoin

Teorema

Misalkan A adalah matriks yang **invertible**. *Maka:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ adj(A)$$

Buktinya bisa dibaca di buku Howard Anton, halaman 134.

Algoritma untuk komputasi invers menggunakan adjoin

Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks dengan ukuran $n \times n$. Kita ingin menghitung A^{-1}

1. Untuk setiap elemen a_{ij}, cari matriks M_{ij}.
2. Hitung minor dari M_{ij}, yaitu $\text{minor}(a_{ij}) = |M_{ij}|$.
3. Hitung kofaktor dari a_{ij}, yaitu $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}|$.
4. Bangun matriks kofaktor $C = [C_{ij}]$.
5. Cari adjoin dari A, yaitu $Adj(A) = C^T$.
6. Hitung invers dari A, yaitu:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot Adj(A)$$

Contoh

Dari *contoh sebelumnya*, kita mendapatkan:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 0 + 12 + 4 - (-12 - 36 + 0) = 16 - (-48) = 64$$

Maka,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\text{adj}(A) = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & \frac{-10}{64} \\ \frac{-16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{bmatrix}$$

Pembuktian formula invers matriks 2×2 dengan menggunakan adjoin

Buktikan dengan menggunakan algoritma sebelumnya (dengan adjoin), bahwa:

Invers dari matriks: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ adalah:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/|A| & -b/|A| \\ -c/|A| & a/|A| \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Solusi (1)

Langkah 1: Tentukan M_{ij} untuk setiap $i, j \in \{1, 2\}$

- $M_{11} = [d]$
- $M_{12} = [c]$
- $M_{21} = [b]$
- $M_{22} = [a]$

Solusi (2)

Langkah 1: Tentukan C_{ij} untuk setiap $i, j \in \{1, 2\}$

- $C_{11} = d$
- $C_{12} = -c$
- $C_{21} = -b$
- $C_{22} = a$

Langkah 1: Tentukan matriks kofaktor $C = [C_{ij}]$

$$\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Maka:

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Sehingga invers dari A adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Bagian 3: Sifat-sifat invers matriks

Misalkan A adalah matriks **invertible**. Berikut ini berlaku.

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$ for a scalar $k \neq 0 \in \mathbb{R}$
3. $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$
4. $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

Buktikan sifat-sifat invers matriks di atas.

Anda dapat memberikan contoh untuk memeriksa kebenaran sifat-sifat tersebut.

Sifat-sifat invers matriks

Teorema

Jika A dan B memiliki invers, maka AB memiliki invers.

Proof.

Perhatikan $B^{-1}A^{-1}$. Maka:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

Oleh karena itu, AB dapat dibalik, dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

Perumuman:

Jika $A_1, A_2, \ldots, A_k$ adalah matriks yang *invertible*, maka:

$$(A_1 A_2 \ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}$$

Latihan

Latihan akan diberikan di kelas... No 4, 5, 6, halaman 76

Buku Referensi Howard Anton

Bagian 4: Matriks ortogonal

Suatu matriks disebut orthogonal jika $A^T = A^{-1}$, yaitu $AA^T = A^TA = I$ (matriks identitas).

Catatan: A ortogonal *hanya jika* A adalah matriks persegi dan memiliki invers.

Contoh

$$\textit{Misalkan } A = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

Apakah A ortogonal? Berapakah hasil dari AA^T?

Vektor $u_1, u_2, \ldots, u_m$ dalam $\mathbb{R}^n$ dikatakan membentuk himpunan vektor ortonormal jika vektor-vektor tersebut merupakan vektor satuan dan saling ortogonal; yaitu.,

$$u_i \cdot u_j = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ 1 & \text{if } i = j \end{cases}$$

Teorema

Misalkan A menjadi matriks nyata. Maka berikut ini setara:

- *A ortogonal.*
- *Baris A membentuk himpunan ortonormal.*
- *Kolom A membentuk himpunan ortonormal.*

bersambung...