

# Aljabar Linier

[KOMS120301] - 2023/2024

## 5.2 - Sifat determinan matriks

Dewi Sintiar

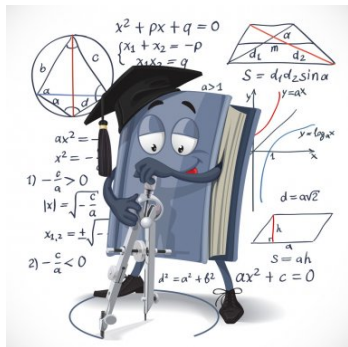
Program Studi S1 Ilmu Komputer  
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 5 (Oktober 2023)

Setelah kuliah ini, Anda diharapkan mampu:

- 1 mengimplementasikan sifat-sifat determinan dalam penyelesaian masalah penghitungan determinan;
- 2 menghitung determinan matriks menggunakan ekspansi kofaktor;
- 3 memecahkan sistem persamaan linier menggunakan aturan Cramer;
- 4 menjelaskan prosedur menghitung determinan matriks blok diagonal.

*Good math skills are developed by doing lots of problems.*



# Bagian 5: Sifat-sifat determinan

## Teorema

$$\det(A^T) = \det(A)$$

**Q:** Bisakah Anda menjelaskan mengapa? Periksa matriks  $2 \times 2$  dan matriks  $3 \times 3$ .

## Implikasi:

*Teorema apapun tentang determinan matriks  $A$  yang menyangkut baris dari  $A$  akan memiliki teorema analog dengan menggunakan kolom dari  $A$ .*

## Teorema

Misalkan  $A$  adalah matriks persegi.

- 1 Jika  $A$  memiliki baris (kolom) nol, maka  $|A| = 0$ .
- 2 Jika  $A$  memiliki dua baris (kolom) yang identik, maka  $|A| = 0$ .
- 3 Jika  $A$  adalah matriks segitiga, maka  $|A|$  diperoleh dari hasil perkalian elemen-elemen diagonal:

$$|A| = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Khususnya, untuk matriks identitas  $I$ , kita memiliki  $|I| = 1$ .

**Q:** Berikan argumen yang menjelaskan mengapa sifat-sifat tersebut berlaku!

## Teorema

Misalkan matriks  $B$  diperoleh dari matriks  $A$  dengan melakukan operasi baris (kolom) elementer.

- 1 Jika dua baris (kolom) dari  $A$  dipertukarkan, maka  $|B| = -|A|$ .
- 2 Jika sebuah baris (kolom) dari  $A$  dikalikan dengan skalar  $k$ , maka  $|B| = k|A|$ .
- 3 Jika kelipatan baris (kolom)  $A$  ditambahkan ke baris (kolom) lain dari  $A$ , maka  $|B| = |A|$ .

**Q:** Berikan argumen yang menjelaskan mengapa sifat-sifat tersebut berlaku!

## Teorema

*Diberikan dua matriks persegi A dan B dengan orde yang sama. Maka:*

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

**Q:** Berikan argumen yang menjelaskan mengapa teorema tersebut berlaku!

**Matriks elementer**  $E_n$  adalah matriks yang berbeda dari matriks identitas  $I_n$  oleh satu operasi baris elementer tunggal.

## Korolari

*Jika E adalah matriks dasar berukuran n, dan A adalah matriks persegi  $n \times n$ . Maka  $\det(EA) = \det(E) \det(A)$ .*



Diberikan:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

- 1 Tentukan  $AB$
- 2 Tentukan  $\det(A)$ ,  $\det(B)$ , dan  $\det(AB)$ .
- 3 Apakah benar bahwa  $\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB)$  ?

## Latihan: *determinan perkalian dua matriks*

Diberikan:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

- 1 Tentukan  $AB$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

- 2 Tentukan  $\det(A)$ ,  $\det(B)$ , dan  $\det(AB)$ .

$$\det(A) = 1, \quad \det(B) = -23, \quad \det(AB) = -23$$

- 3 Apakah benar bahwa  $\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB)$  ?

# Bagian 6: Menghitung determinan dengan ekspansi kofaktor (*pendekatan algoritmik*)

# Minor dan kofaktor

Misalkan  $A = [a_{ij}]$  adalah matriks persegi  $n$ .

Misalkan  $M_{ij}$  adalah matriks persegi dengan ordo  $(n - 1)$  yang diperoleh dari  $A$  dengan menghapus baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  dari  $A$ .

Minor dari elemen  $a_{ij}$  dari  $A$  didefinisikan sebagai:

$$\text{minor}(A) = \det(M_{ij})$$

Kofaktor dari  $a_{ij}$  didefinisikan sebagai minor bertanda (*signed minor*) dari  $a_{ij}$ , dan dilambangkan dengan:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

Pola elemen minor bertanda pada  $A$  dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

## Contoh: *minor dan kofaktor*

Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Temukan minor dan kofaktor dari elemen  $a_{32}$ !

**Solusi:**

Elemen  $a_{32}$  adalah 8.

$$M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Jadi, minor dari  $a_{32}$  adalah  $\det(M_{32}) = 1(6) - 4(3) = 6 - 12 = -6$ .

Kofaktor dari  $a_{32}$  adalah  $(-1)^{3+2} \cdot 6 = -6$ .

# Ekspansi Laplace untuk menghitung determinan

**Determinan** dari matriks  $A = [a_{ij}]$  sama dengan jumlah perkalian yang diperoleh dengan mengalikan elemen dari setiap baris (kolom) dengan kofaktornya masing-masing:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \rightarrow \text{row}$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \rightarrow \text{column}$$

Rumusnya disebut **Ekspansi Laplace** dari determinan  $A$  pada baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$ .

# Menghitung determinan

**Algoritma:** (Metode reduksi orde determinan)

**Input:** Matriks persegi  $n$  bukan nol  $A = [a_{ij}]$  dengan  $n > 1$

- 1 Pilih elemen  $a_{ij} = 1$ , atau jika tidak ada,  $a_{ij} \neq 0$ ;
- 2 Menggunakan  $a_{ij}$  sebagai pivot, terapkan operasi baris dasar\* untuk menempatkan 0 di semua posisi lain di kolom<sup>†</sup> yang berisi  $a_{ij}$ ;
- 3 Perluas determinan dengan kolom<sup>‡</sup> yang berisi  $a_{ij}$ .

**Catatan:**

- Algoritma biasanya digunakan untuk kasus  $n \geq 4$ .
- Eliminasi Gauss dapat diimplementasikan untuk mengubah matriks adalah matriks segitiga bawah (*upper-triangular*). Selanjutnya determinan dihitung sebagai perkalian diagonalnya.

Tetapi kita perlu melacak operasi dasar yang dilakukan (karena masing-masing akan mengubah tanda determinan).

---

\*dapat juga menggunakan operasi kolom dasar

<sup>†</sup>atau baris, jika menggunakan operasi kolom dasar

<sup>‡</sup>atau baris, jika menggunakan operasi kolom dasar

## Contoh: menghitung determinan menggunakan kofaktor

Terapkan algoritma penghitungan determinan dengan kofaktor untuk menghitung determinan dari matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$



## Contoh: menghitung determinan menggunakan kofaktor

Gunakan  $a_{23} = 1$  sebagai pivot, dan terapkan operasi baris dasar, lalu ekspansi determinannya.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 7 & 0 & 9 \\ -5 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -7 + 45 = 38 \end{aligned}$$

# Peninjauan determinan matriks $2 \times 2$ dan $3 \times 3$

Mari kita turunkan rumus determinan dari matriks ( $2 \times 2$ ) menggunakan algoritma.

$$\text{Diberikan } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \end{vmatrix}$$

Sehingga,

$$|A| = a_{11} \left( a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \right) = a_{11} \left( \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11}} \right) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Coba turunkan rumus untuk menghitung determinan matriks ( $3 \times 3$ ) berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Apakah rumus yang Anda dapatkan sama dengan rumus dari metode permutasi?

# Bagian 7: Aplikasi pada sistem persamaan linear: *Aturan Cramer* (lanjutan)

# Aturan Cramer (*lanjutan*)

Diberikan sistem persamaan linier:  $AX = B$ , dengan  $A = [a_{ij}]$  adalah matriks persegi dan  $B = [b_i]$  adalah vektor kolom.

Misalkan  $A_j$ : matriks yang diperoleh dari  $A$  dengan mengganti kolom ke- $i$  dari  $A$  dengan vektor kolom dari  $B$ .

Misalkan:

$$D = \det(A), \quad N_1 = \det(A_1), \quad N_2 = \det(A_2), \quad \dots, \quad N_n = \det(A_n)$$

## Teorema (Aturan Cramer)

*Sebuah sistem persegi  $AX = B$  memiliki solusi jika  $D \neq 0$ , dimana solusinya diberikan oleh:*

$$x_1 = \frac{N_1}{D}, \quad x_2 = \frac{N_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{N_n}{D}$$

**Q:** Berikan argumen yang menjelaskan mengapa teorema tersebut berlaku!

- Sistem harus *persegi* (memiliki jumlah persamaan dan variabel yang sama);
- Solusinya hanya ada jika  $D \neq 0$ ;
- Jika  $D = 0$ , kita tidak tahu apakah sistem memiliki solusi atau tidak.

Untuk sistem homogen persegi:

## Teorema

*Sistem homogen persegi  $AX = 0$  memiliki solusi tak-nol jika dan hanya jika  $D = |A| = 0$ .*

Terapkan aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem berikut:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

**Solusi:** Matriks koefisien SPL:  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  memiliki determinan

$$D = 2 - 6 + 1 + 4 + 3 + 1 = 5$$

Terapkan aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem berikut:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

**Solusi:** Matriks koefisien SPL:  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  memiliki determinan

$$D = 2 - 6 + 1 + 4 + 3 + 1 = 5$$

Karena  $D \neq 0$ , maka sistem memiliki solusi tunggal. Selanjutnya:

$$N_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad N_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}, \quad N_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Sehingga:  $N_x = 20$ ,  $N_y = -10$ , dan  $N_z = 15$ .

Jadi,  $x = \frac{20}{5} = 4$ ,  $y = \frac{-10}{5} = -2$ , dan  $z = \frac{15}{5} = 3$ .



# Bagian 8: Matriks blok untuk menghitung determinan

## Teorema

Misalkan  $M$  adalah *matriks blok segitiga atas (bawah)* dengan blok diagonal:

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

Maka:

$$\det(M) = \det(A_1) \det(A_2) \cdots \det(A_n)$$

Diberikan sebuah matriks blok segitiga atas:

$$M = \left( \begin{array}{cc|ccc} 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ -1 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

Evaluasi determinan setiap blok diagonal:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 13 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 29$$

Maka:  $|M| = 13 \cdot 29 = 377$ .

**Catatan.** Misalkan  $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  dimana  $A, B, C, D$  adalah matriks persegi.

Maka **umumnya tidak benar** bahwa  $|M| = |A||D| - |B||C|$ .

*Latihan akan diberikan di kelas...*