

Aljabar Linier

[KOMS120301] - 2023/2024

5.1 - Determinan Matriks

Dewi Sintiar

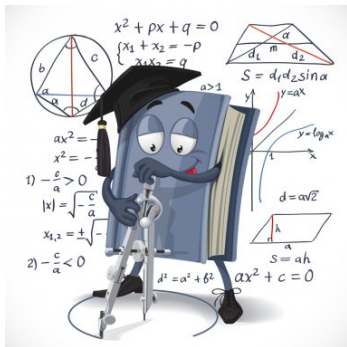
Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 5 (Oktober 2022)

Setelah pembelajaran ini, Anda diharapkan dapat:

- 1 menjelaskan konsep determinan suatu matriks;
- 2 menghitung determinan dari matriks (2×2) ;
- 3 menghitung determinan dari matriks (3×3) ;
- 4 menjelaskan interpretasi geometris determinan matriks (2×2) ;
- 5 menjelaskan interpretasi geometris determinan matriks (3×3) ;
- 6 menjelaskan penggunaan determinan dalam penyelesaian sistem persamaan linier;
- 7 menggunakan permutasi untuk menghitung determinan;

Good math skills are developed by doing lots of problems.



Bagian 1: Definisi formal dari determinan

Definisi formal matriks determinan

Diberikan matriks persegi $A = [a_{ij}]$ dengan ukuran $n \times n$.

Kita dapat menetapkan *skalar* terhadap matriks A , sebagai fungsi dari entri-entri matriks persegi, yang disebut sebagai **determinan** dari matriks A .

Determinan matriks A dilambangkan dengan $|A|$, dan seringkali ditulis sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinan matriks orde 1 dan 2

Untuk $n = 1, 2$, determinan matriks didefinisikan sebagai:

$$|a_{11}| = a_{11} \quad \text{dan} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Contoh

Tentukan determinan matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

Bagian 2: Determinan dari matriks 2×2

Determinan dari matriks 2×2

Diberikan sebuah matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

Di sekolah menengah, Anda mungkin telah mempelajari bahwa **determinan** dari matriks (ukuran 2×2) didefinisikan sebagai

$$a_1 b_2 - a_2 b_1$$

dan dinotasikan dengan:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Perhatikan lagi sistem persamaan linier dalam dua variabel:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

- Sistem memiliki tepat satu solusi ketika $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$
- Sistem tidak memiliki solusi atau memiliki banyak solusi ketika $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

Perhatikan lagi sistem persamaan linier dalam dua variabel:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

- Sistem memiliki tepat satu solusi ketika $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$
- Sistem tidak memiliki solusi atau memiliki banyak solusi ketika $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

Matriks koefisien $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ memiliki determinan $= a_1b_2 - a_2b_1$.

Catatan. Dengan demikian, determinan dari matriks koefisien menentukan jumlah solusi dari sistem yang diberikan. Sistem memiliki solusi unik jika $D \neq 0$.

Penerapan determinan pada sistem persamaan linear

Menyelesaikan SPL dengan metode eliminasi:

$$a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = b_2 c_1$$

$$a_2 b_1 x + b_1 b_2 y = b_1 c_2$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)x = b_2 c_1 - b_1 c_2$$

$$x = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Sehingga:

$$b_2 c_1 - b_1 c_2 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = N_x \quad \text{dan} \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D$$

Dengan demikian, $x = \frac{N_x}{D}$

Penerapan determinan pada sistem persamaan linear

Nilai y dapat ditentukan dengan cara serupa:

$$a_1 a_2 x + a_2 b_1 y = a_2 c_1$$

$$a_1 a_2 x + a_1 b_2 y = a_1 c_2$$

$$(a_2 b_1 - a_1 b_2)y = a_2 c_1 - a_1 c_2$$

$$x = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Sehingga:

$$a_1 c_2 - a_2 c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = N_y \quad \text{dan} \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D$$

$$\text{Jadi, } y = \frac{N_y}{D}$$

Contoh penyelesaian SPL dengan determinan

Selesaikan sistem berikut menggunakan determinan:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -10 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$$

Solusi:

$$N_x = \begin{vmatrix} -10 & -4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -20 - (-8) = -12$$

$$N_y = \begin{vmatrix} 3 & -10 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 10 = -4$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$$

Jadi, $x = \frac{-12}{2} = -6$ dan $y = \frac{-4}{2} = -2$.

Diberikan:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

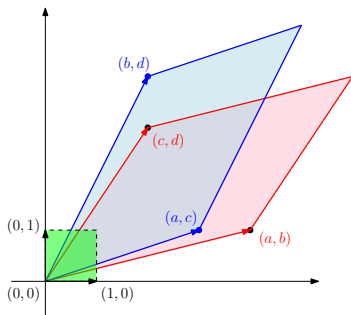
dengan matriks koefisien $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ memiliki determinan tak-nol (artinya, SPL memiliki solusi tunggal).

Solusi SPL adalah:

$$x = \frac{N_x}{D} \quad \text{dan} \quad y = \frac{N_y}{D}$$

$$\text{dimana } N_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad N_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \text{dan } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Interpretasi geometris



Matriks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dapat dilihat sebagai “pengaturan” dari:

- vektor baris:
 $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$
- atau, vektor kolom:
 $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$

Matriks mendefinisikan apa yang disebut *transformasi linier* dari persegi satuan (digambar **hijau**) yang dibentuk oleh *vektor basis* $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, sehubungan dengan:

- **vektor baris**, ditunjukkan oleh jajar genjang **merah**; atau
- **vektor kolom**, ditunjukkan oleh jajar genjang **biru**

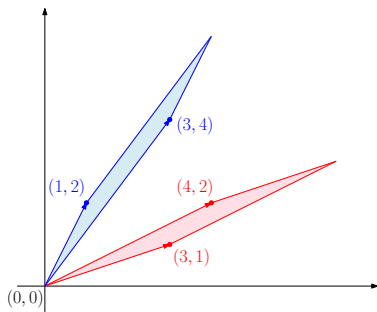
Kedua jajar genjang memiliki luas yang sama.

Contoh

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Gambarlah dua jajar genjang yang mendefinisikan transformasi persegi satuan terhadap masing-masing vektor baris dan vektor kolom.

Solusi:



Bagian 3: Determinan matriks ukuran 3×3

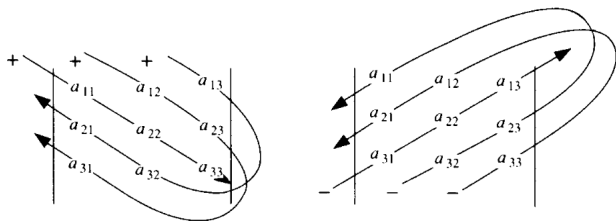
Determinan matriks ukuran 3×3

Diberikan matriks:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks di atas didefinisikan sebagai:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$



Bentuk alternatif untuk determinan matriks orde-3

Determinan dari matriks di atas didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Formula ini dapat digambarkan sebagai berikut:

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Tentukan determinan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

Solusi:

- Dengan menggunakan diagram

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3(5)(4) + 2(-1)(2) + (1)(-4)(-3) - 1(5)(2) - 2(-4)4 - 3(-1)(-3) \\ &= 60 - 4 + 12 - 10 + 32 - 9 = 81 \end{aligned}$$

- Dengan menggunakan bentuk alternatif

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} &= 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 3(20 - 3) - 2(-16 + 2) + 1(12 - 10) = 51 + 28 + 2 = 81 \end{aligned}$$

Diketahui sistem persamaan linier berikut:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Kita dapat melakukan perhitungan serupa seperti pada kasus matriks (2×2), untuk menemukan solusi sistem.

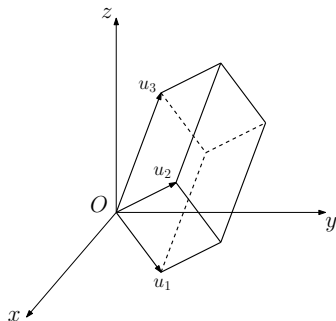
Matriks koefisien dari SPL tersebut adalah: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Penerapan pada sistem persamaan linear

SPL memiliki solusi tunggal hanya jika $D = \det(A) \neq 0$.
Solusinya adalah:

$$x = \frac{N_x}{D}, \quad y = \frac{N_y}{D}, \quad z = \frac{N_z}{D}$$

dimana N_x , N_y , dan N_z diperoleh dengan mengganti kolom ke-1, ke-2, dan ke-3 dari A dengan vektor konstanta $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.



Dalam \mathbb{R}^3 , vektor u_1 , u_2 , dan u_3 menentukan paralelepiped, yang merupakan hasil transformasi kubus satuan menggunakan vektor $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Catatan.

Misal u_1, u_2, \dots, u_n adalah vektor di \mathbb{R}^n . Maka persamaan paralelepiped:

$$S = \{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n : 0 \leq a_i \leq 1 \text{ for } i = 1, \dots, n\}$$

$$V(S) = \text{nilai mutlak } \det(A)$$

Bagian 4: Determinan dengan orde sembarang (*secara kombinatorial*)

Pola dalam rumus determinan

Dapatkan Anda menemukan pola dari rumus-rumus determinan berikut?

- Untuk matriks 2×2 , misalkan: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ maka

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Untuk matriks 3×3 , misalkan:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ maka:}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

Kita akan mempelajari pola-pola ini!

Tanda (paritas) permutasi

Diberikan urutan elemen: $\sigma = j_1 j_2 \dots j_n$, **permutasi** dari σ didefinisikan sebagai susunan objek di σ dalam urutan tertentu.

Himpunan semua permutasi dari objek n dilambangkan dengan S_n .

Invers di σ adalah sepasang bilangan bulat (i, k) , sehingga $i > k$ tetapi i mendahului k di σ .

σ disebut:

- **permutasi genap**, jika banyaknya inversi di σ adalah genap;
- **permutasi ganjil**, sebaliknya.

Tanda atau **paritas** dari permutasi σ didefinisikan oleh:

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{jika } \sigma \text{ genap} \\ -1 & \text{jika } \sigma \text{ ganjil} \end{cases}$$

Contoh: tanda permutasi

Diberikan permutasi $\sigma = 35412$ dalam S_5 . Bagaimanakah tanda dari σ ?

Solusi:

- 3 angka (3, 4 dan 5) mendahului 1;
- 3 angka (3, 4 dan 5) mendahului 2;
- 1 angka (5) mendahului 4;
- tidak ada angka yang mendahului 3 atau 5

Karena $3 + 3 + 1 = 7$ ganjil, maka σ adalah permutasi ganjil. Oleh karena itu

$$\text{sgn}(\sigma) = -1$$

Latihan:

- 1 Cari tanda permutasi: $\epsilon = 123 \dots n$ dalam S_n .
- 2 Temukan tanda setiap permutasi dalam S_2 dan S_3 .
- 3 Benarkah di S_n , setengah dari permutasinya genap, dan setengahnya ganjil?

Permutasi untuk menghitung determinan (1)

Diberikan matriks $A = [a_{ij}]$ berukuran $n \times n$ pada suatu lapangan K . Perhatikan perkalian dari n elemen dari A yaitu:

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

dimana dalam hal ini, $j_1 j_2 \dots j_n$ adalah permutasi dari $1 2 3 \dots n$.

Sehingga:

- *satu dan hanya satu* elemen berasal dari setiap baris A ; dan
- *satu dan hanya satu* elemen berasal dari setiap kolom A .

Q: Berapa banyak perkalian yang berbeda dari bentuk $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ yang ada?

A: Terdapat $n!$ perkalian seperti itu, karena ada $n!$ kemungkinan permutasi dari $j_1 j_2 \dots j_n$.

Permutasi untuk menghitung determinan (2)

Determinan dari matriks $A = [a_{ij}]$ berukuran $n \times n$ didefinisikan sebagai:

jumlah semua perkalian $n!$ $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$, di mana setiap perkalian dikalikan dengan tanda $\sigma = j_1 j_2 \dots j_n$.

$$|A| = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

atau, dapat dituliskan sebagai:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Permutasi untuk menghitung determinan (3)

1 Diketahui $A = [a_{11}]$, maka $\det(A) = a_{11}$.

2 Diketahui $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, lalu $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

3 Diberikan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, maka:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

bersambung...