Aljabar Linier

[KOMS120301] - 2023/2024

4.1 - Algoritma Eliminasi Gauss

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 4 (September 2023)

Setelah pembelajaran ini, Anda diharapkan dapat:

- menerapkan algoritma eliminasi Gauss untuk menyelesaikan sistem persamaan linear.

Metode Eliminasi Gauss

Diberikan m sistem persamaan linear dalam n variabel:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \tag{1}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \tag{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{3}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \tag{4}$$

yang dapat dituliskan dalam matriks:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n}x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \cdots & a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

atau yang setara, ditulis dalam perkalian matriks $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ini dapat ditulis dengan menggunakan matriks augmentasi:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Eliminasi Gauss juga diketahui sebagai reduksi baris.

Ingat kembali tiga jenis operasi baris dasar:

1. Tukar posisi dua baris.
2. Kalikan baris dengan skalar bukan nol.
3. Tambahkan ke satu baris kelipatan skalar dari baris yang lain.

Algoritma

1. Nyatakan sistem persamaan linier dengan *matriks augmentasi*;
2. Lakukan *operasi baris elementer* pada matriks yang diperbesar, sehingga diperoleh matriks eselon baris;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \sim ERO \sim \begin{bmatrix} 1 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * \end{bmatrix}$$

3. Selesaikan matriks eselon menggunakan *substitusi mundur*.

Contoh Eliminasi Gauss

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Solusi:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R1/2} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R3+2R1]{R2-4R1} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R2/(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R3-6R2} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{bmatrix} \xrightarrow{R3/(-5)} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Contoh Eliminasi Gauss (*cont.*)

Dari matriks yang diperbesar, diperoleh sistem berikut:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{5}{2} \\ \qquad\quad x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{7}{2} \\ \qquad\qquad\qquad x_3 = 3 \end{cases}$$

Dengan menggunakan *substitusi mundur*, diperoleh:

- Dari pers (3): $x_3 = 3$
- Dari pers (2):

$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{7}{2} \;\rightarrow\; x_2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(3) = 2$$

- Dari pers (1):

$$x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{5}{2} \;\rightarrow\; x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}(2) - \frac{1}{2}(3) = 1$$

Solusinya adalah: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$

Contoh 2

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 10 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 = 15 \end{cases}$$

Solusi:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 4 & 10 \\ 3 & -1 & 6 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow[R3-3R1]{R2-2R1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks augmentasi, kita hanya dapat menurunkan satu persamaan:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \ \rightarrow \ x_1 = 5 + x_2 - 2x_3$$

Nyatakan: $x_2 = r$ and $x_3 = s$, dimana $r, s \in \mathbb{R}$.

Maka solusi SPL adalah: $x_1 = 5 + r - 2s$, $x_2 = r$, $x_3 = s$, dengan $r, s \in \mathbb{R}$.

Contoh 3

Diberikan SPL sebagai berikut:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\quad + 2x_5 \qquad\quad = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1 \\ \qquad\qquad 5x_3 + 10x_4 \qquad + 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 \qquad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6 \end{cases}$$

Solusi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix} \sim ERO \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks augmentasi terakhir, diperoleh:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad + 2x_5 \qquad = 0 \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 \qquad + 3x_6 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_6 = 1/3 \end{cases}$$

- Dari persamaan ke-3: $x_6 = 1/3$
- Substitusi ke persamaan ke-2: $x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 1$

$$\Rightarrow \; x_3 = 1 - 2x_4 - 3x_6 = 1 - 2x_4 - 3(1/3)$$
$$= 1 - 2x_4 - 1 = -2x_4$$

- Substitusi ke persamaan pertama: $x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0$

$$\Rightarrow \; x_1 = -3x_1 + 2x_3 - 2x_5 = -3x_2 + 2(-2x_4) - 2x_5$$
$$= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$$

Misalkan $x_2 = r$, $x_4 = s$, $x_5 = t$, dimana $r, s, t \in \mathbb{R}$. Maka:

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \; x_2 = r, \; x_3 = -2s, \; x_4 = s, \; x_5 = t, \; x_6 = 1/3$$

Contoh 4

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Solusi:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R3-3R1]{R2-2R1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R2/(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R3+2R2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Dari matriks augmentasi terakhir, diperoleh sistem berikut::

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1 \end{cases}$$

Dari persamaan ke-3, tidak ada nilai untuk x_1, x_2, dan x_3 yang dapat memenuhi persamaan. Jadi, SPL tidak memiliki solusi

Latihan soal

Selesaikan SPL berikut menggunakan metode eliminasi Gauss:

$$\begin{cases} \quad\;\; - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -2 \\ 6x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

bersambung...