Aljabar Linier

[KOMS119602] - 2022/2023

4.2 - Eliminasi Gauss-Jordan

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 7-11 February 2022

Tujuan pembelajaran

Setelah pembelajaran ini, Anda diharapkan dapat:

- menerapkan algoritma eliminasi Gauss-Jordan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier.

Pengenalan

Carl Friedrich Gauss
(*German mathematician*)

Wilhelm Jordan
(*German mathematician*)

Pengenalan

Ini merupakan pengembangan dari metode Gaussian-Elimination.

- Operasi Baris Elementer (OBE) diimplementasikan pada matriks yang diperbesar, sehingga diperoleh *matriks eselon tereduksi*.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \sim ERO \sim \begin{bmatrix} 1 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * \end{bmatrix}$$

- Perbedaan dengan metode Gaussian adalah, disini substitusi ke belakang tidak diperlukan untuk mendapatkan nilai variabel.
- Nilai setiap variabel dapat diturunkan langsung dari matriks yang diperbesar.

1. **Fase maju (fase eliminasi Gauss)**

   Di bawah diagonal utama 1 harus 0.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{ERO} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2. **Fase mundur**

   Di atas diagonal utama 1 harus 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{R1-(3/2)R2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/4 & -11/4 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{R1+(5/4)R3 \\ R2-(1/2)R3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks terakhir adalah bentuk eselon baris tereduksi.

Kita dapat menurunkan solusinya secara langsung: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Contoh 1

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 3x_4 = -3 \end{cases}$$

Solusi:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{\substack{R2-2R1 \\ R4-3R1 \\ R3+R1}}{}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R2/3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{\substack{R4-3R2 \\ R3-R2}}{}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R1+R2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan yang bersesuaian adalah:

$$x_1 - x_4 = -1$$

$$x_2 - 2x_3 = 0$$

Contoh 1 (*lanjutan*)

Matriks augmentasi terakhir dalam bentuk eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solusinya dapat diperoleh dengan menyelesaikan sistem:

$$x_1 - x_4 = -1$$
$$x_2 - 2x_3 = 0$$

Dari persamaan ke-2, kita peroleh: $x_2 = 2x_3$
Dari persamaan pertama, kita peroleh: $x_1 = x_4 - 1$

Misal $x_3 = r$ dan $x_4 = s$ dengan $r, s \in \mathbb{R}$.
Maka solusi sistemnya adalah:

$$x_1 = s - 1,\ x_2 = 2r,\ x_3 = r,\ x_4 = s$$

Selesaikan sistem berikut menggunakan metode Gauss-Jordan

$$\begin{cases} \quad\quad\quad\quad\quad - \ 2x_3 \quad\quad\quad + \ 7x_5 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 6x_4 + 12x_5 = 28 \\ 2x_1 + 4x_2 - \ 5x_3 + 8x_4 - \ 5x_5 = -1 \end{cases}$$

Solusi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \overset{R1 \leftrightarrow R2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \overset{R1/2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \overset{R3 - 2R1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \overset{R2/(-2)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \overset{R3-5R2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \overset{R3/(1/2)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{R2+7/2R3}{\overset{R1-6R3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{R1+5R2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dari matriks augmentasi terakhir, dapat diturunkan:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad + 3x_4 & = 7 \\ \qquad\quad x_3 & = 1 \\ \qquad\qquad\qquad x_5 & = 2 \end{cases}$$

Misal $x_2 = s$ dan $x_4 = t$, solusi SPL tersebut adalah:

$$x_1 = 7-2s-3t,\ x_2 = s,\ x_3 = 1,\ x_4 = t,\ x_5 = 2,\ s, t \in \mathbb{R}$$

Contoh 3

Selesaikanlah sistem berikut menggunakan metode Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Matriks augmentasinya adalah:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

yang dapat direduksi menjadi bentuk eselon baris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 3 (*lanjutan*)

Sistem persamaan linier yang sesuai adalah:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad + x_5 = 0 \\ \qquad\quad x_3 \quad + x_5 = 0 \\ \qquad\qquad x_4 \qquad = 0 \end{cases}$$

Dengan menyelesaikan *variabel utama*, diperoleh:

$$x_1 = -x_2 - x_5$$
$$x_3 = -x_5$$
$$x_4 = 0$$

Solusi umumnya adalah:

$$x_1 = -s - t,\ x_2 = s,\ x_3 = -t,\ x_4 = 0,\ x_5 = t, \quad \text{with } s, t \in \mathbb{R}$$

Analisis dari Contoh 3

Apa yang dapat kamu amati dari SPL di atas?

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Sistem Persamaan Linier Homogen

Ingatlah bahwa sistem berikut ini disebut SPL homogen.

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}$$

SPL tersebut selalu memiliki solusi, yakni:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0$$

yang dinamakan solusi trivial

Jika solusi selain $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0$ ada, maka itu disebut solusi tidak trivial.

Example

Dari Contoh 3 bagian sebelumnya, kita memperoleh solusi dari SPL yang diberikan adalah:

$$x_1 = -s - t,\ x_2 = s,\ x_3 = -t,\ x_4 = 0,\ x_5 = t, \quad \text{with } s, t \in \mathbb{R}$$

Dalam hal ini, jika $s, t = 0$, maka kita mendapatkan **solusi trivial**, yaitu:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0$$

Kita dapat mengatur $s \neq 0$ atau $t \neq 0$ untuk mendapatkan **solusi tak-trivial**.

Selesaikan SPL homogen berikut dengan eliminasi Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Solusi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R1 \leftrightarrow R2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} R3 - 2R1 \\ \sim \\ R4 + 2R1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R2/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} R3 - 3R2 \\ \sim \\ R4 - R2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} R1 + 3R3 \\ \sim \\ R2 - 2R3 \\ R4 + 10R3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kapankah sebuah sistem linier homogen memiliki tak-hingga banyaknya solusi?

Analisis sistem homogen

Kapankah sebuah sistem linier homogen memiliki tak-hingga banyaknya solusi?

Berapa banyak variabel bebas yang ada dalam sistem linier homogen (hubungkan dengan nilai n dan r)?

Teorema

Jika sistem linier homogen memiliki n yang tidak diketahui, dan jika bentuk eselon baris tereduksi dari matriks augmented-nya memiliki r baris bukan nol, maka sistem tersebut memiliki variabel bebas sebanyak $n - r$.

Teorema

Sistem linier homogen dengan lebih banyak variabel daripada persamaan memiliki tak-hingga banyaknya solusi.

bersambung...