

Aljabar Linier

[KOMS119602] - 2022/2023

3.1 - Sistem Persamaan Linier

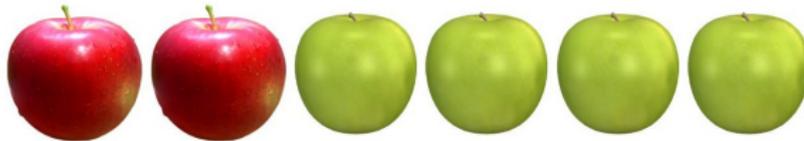
Dewi Sintiar

Computer Science Study Program
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 7-11 February 2022



Rp 21.000,00



Rp 22.000,00



???



Rp 26.000,00



Rp 24.500,00



Rp 16.000,00



???

Bagian 1: Sistem Persamaan Linier (SPL)

Setelah kuliah ini, Anda diharapkan dapat:

- 1 menganalisis komponen sistem persamaan linier;
- 2 memverifikasi apakah himpunan yang diberikan adalah solusi dari suatu SPL;
- 3 mengidentifikasi SPL homogen dan non-homogen;
- 4 merumuskan matriks *koefisien* dan matriks *augmentasi* dari SPL yang diberikan;
- 5 menunjukkan bahwa operasi baris elementer memberikan SPL yang ekuivalen;
- 6 menganalisis interpretasi geometris SPL dengan 1, 2, atau 3 variabel;
- 7 menerapkan algoritma eliminasi dan substitusi untuk menyelesaikan SPL;
- 8 menjelaskan konsep SPL yang ditulis dalam matriks segitiga atau dalam bentuk matriks eselon.

Terminologi dan notasi (1)

Diberikan variabel yang tidak diketahui x_1, x_2, \dots, x_n . Sebuah **sistem persamaan linier** pada variabel tersebut didefinisikan sebagai:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (1)$$

dimana $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ (ini dapat diganti dengan *field* lain).

Solusi persamaan (1) adalah **daftar nilai yang bersesuaian dengan variabel**, atau **vektor u dalam \mathbb{R}^n** .

$$x_1 = r_1, x_2 = r_2, \dots, x_n = r_n \quad \text{or} \quad u = (r_1, r_2, \dots, r_n)$$

Ini berarti:

$$a_1r_1 + a_2r_2 + \dots + a_nr_n = b \quad \text{bernilai benar}$$

Dalam hal ini, dikatakan bahwa **u memenuhi** persamaan (1).

Dalam persamaan (1):

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Dalam hal ini:

- persamaan ditulis dalam **bentuk standar**
- konstanta a_k adalah **koefisien** dari x_k
- b adalah **suku konstan** dari persamaan

Catatan: Jika n kecil, digunakan huruf yang berbeda untuk menunjukkan variabel, daripada menggunakan pengindeksan.

Contoh: Berapakah banyaknya solusi SPL?

Diberikan persamaan:

$$2x + 3y - z = 4$$

Dapatkah Anda menemukan solusi untuk persamaan tersebut?

Berapa banyak solusi yang dapat Anda temukan?

Sistem persamaan linier adalah daftar persamaan linier:
 L_1, L_2, \dots, L_m dengan variabel yang sama x_1, x_2, \dots, x_n .

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (2)$$

$$\dots \dots \dots \quad (3)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \quad (4)$$

dimana a_{ij} dan b_i adalah konstanta.

- Sistem persamaan linier ditulis dalam **bentuk standar**;
- a_{ij} adalah **koefisien** variabel x_j dalam persamaan L_i ;
- bilangan b_i adalah **konstanta** dari persamaan L_i .

Apa arti kata “linier”?

Linear means



Bagian 2: Jenis-jenis Sistem Persamaan Linear

Istilah dasar yang terkait dengan “sistem persamaan linear”

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

- SPL tersebut berukuran $m \times n$

Solusi dari sistem adalah daftar nilai untuk yang tidak diketahui atau vektor u dalam \mathbb{R}^n .

$$x_1 = r_1, x_2 = r_2, \dots, x_n = r_n \quad \text{or} \quad u = (r_1, r_2, \dots, r_n)$$

Diketahui sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

- Berapa nilai m dan n dalam SPL tersebut?
- Tentukan apakah solusi berikut merupakan solusi dari sistem tersebut!
 - 1 $u = (-8, 6, 1, 1)$
 - 2 $v = (-10, 5, 1, 2)$

Matriks augmentasi dan matriks koefisien suatu SPL (1)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- matriks sebelah kiri disebut **matriks augmentasi**;
- matriks sebelah kanan disebut **matriks koefisien**.

Selanjutnya, vektor:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

disebut **vektor konstan** (atau **matriks konstan**) dari sistem.

Diberikan SPL:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

Matriks augmentasi dan matriks koefisien didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

SPL homogen dan non-homogen

Sebuah SPL:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dikatakan **homogen** jika $b_i = 0, \forall i$. SPL yang tidak homogen dikatakan **non-homogen**.

Setiap SPL homogen selalu memiliki solusi.

Bisakah Anda menebak solusinya?

SPL ter-degenerasi dan non-degenerasi

Sebuah *persamaan linier* dikatakan **ter-degenerasi** jika semua koefisiennya adalah nol.

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$$

Coba pikirkan, **apa syarat suatu persamaan linier ter-degenerasi agar memiliki solusi?**

Sebuah *persamaan linier* dikatakan **ter-degenerasi** jika semua koefisiennya adalah nol.

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$$

Coba pikirkan, **apa syarat suatu persamaan linier ter-degenerasi agar memiliki solusi?**

- Jika $b \neq 0$, maka persamaan tidak memiliki solusi.
- Jika $b = 0$, maka setiap vektor $u = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ pada \mathbb{R}^n adalah solusi dari persamaan tersebut.

Teorema

Misalkan \mathcal{L} adalah sistem persamaan linier yang memuat persamaan ter-degenerasi L , dengan konstanta b .

- 1 *Jika $b \neq 0$, maka sistem \mathcal{L} tidak memiliki solusi.*
- 2 *Jika $b = 0$, maka L dapat dihapus dari \mathcal{L} tanpa mengubah himpunan solusi \mathcal{L} .*

Bisakah Anda memberikan argumen mengapa teorema tersebut benar?

Variabel *utama* (*leading*) dalam persamaan linier nonter-degenerasi

Diberikan sebuah SPL **non-degenerasi** L .

- Apa yang dapat Anda katakan tentang *koefisien* L ?

Variabel *utama* (*leading*) dalam persamaan linier nonter-degenerasi

Diberikan sebuah SPL **non-degenerasi** L .

- Apa yang dapat Anda katakan tentang *koefisien* L ?

L memiliki setidaknya satu *koefisien tak-nol*

Example

Berikut ini adalah contoh SPL non-degenerasi.

$$0x_1 + 0x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 0x_5 + 8x_6 = 7 \quad \text{and} \quad 0x + 2y - 4z = 5$$

Dalam hal ini, koefisien yang bernilai 0 biasanya diabaikan.

$$5x_3 + 6x_4 + 8x_6 = 7 \quad \text{and} \quad 2y - 4z = 5$$

Bagian 3: Operasi baris elementer

Diberikan bentuk umum SPL:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (2)$$

$$\dots\dots\dots \quad (3)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \quad (4)$$

Kalikan persamaan m dengan konstanta c_1, c_2, \dots, c_m :

$$(c_1 a_{11} + \cdots + c_m a_{m1})x_1 + \cdots + (c_1 a_{1n} + \cdots + c_m a_{mn})x_n = c_1 b_1 + \cdots + c_m b_m$$

Ini adalah **kombinasi linier** dari persamaan-persamaan dalam SPL.

$$3L_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$-2L_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$4L_1 : a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$(\text{Sum})L : 3x_1 + 5x_2 - 10x_3 + 29x_4 = 25$$

- L adalah kombinasi linier dari L_1 , L_2 , dan L_3
- Apakah $u = (-8, 6, 1, 1)$ adalah solusi sistem?
- Apakah $u = (-8, 6, 1, 1)$ adalah solusi kombinasi linier?

Apa yang dapat Anda simpulkan?

Teorema

Diberikan dua SPL, misalkan \mathcal{L}_1 dan \mathcal{L}_2 . Kedua SPL memiliki solusi yang sama jika dan hanya jika setiap persamaan di \mathcal{L}_1 adalah kombinasi linier dari persamaan di \mathcal{L}_2 .

Definition

Dua sistem persamaan linier dikatakan **ekivalen** jika keduanya memiliki solusi yang sama.

Operasi elementer

Diberikan persamaan linier L_1, L_2, \dots, L_m . Operasi berikut disebut operasi dasar.

- **[E1]** Tukarkan dua persamaan

Interchange L_i and L_j or $L_i \leftrightarrow L_j$

- **[E2]** Ganti persamaan dengan kelipatan bukan nol dari dirinya sendiri.

Replace L_i by kL_i or $kL_i \rightarrow L_i$

- **[E3]** Ganti persamaan dengan jumlah kelipatan dari persamaan lain dan dirinya sendiri.

Replace L_j by $kL_i + L_j$ or $kL_i + L_j \rightarrow L_j$

Teorema

Diberikan sebuah sistem \mathcal{L} . Misalkan \mathcal{M} adalah sistem yang diperoleh dari \mathcal{L} oleh urutan elemen operasi berhingga.

Maka SPL \mathcal{M} dan \mathcal{L} memiliki solusi yang sama.

Catatan: Terkadang E_2 dan E_3 dapat diterapkan dalam satu langkah:

[E] Ganti persamaan L_j dengan $kL_i + k'L_j$ (dengan $k, k' \neq 0$)

$$kL_i + k'L_j \rightarrow L_j$$

Bagaimana cara mencari solusi sistem persamaan linier?

- Aplikasikan operasi elementer untuk mengubah sistem yang diberikan menjadi *sebuah sistem ekuivalen yang solusinya dapat dengan mudah diperoleh*.

Ini disebut **Metode Eliminasi Gauss** (akan dibahas nanti).

Bagian 4: SPL dengan ≤ 3 variabel

SPL dengan 1 variabel

Example

Selesaikan SPL satu variabel berikut:

- $4x - 1 = x + 6$
- $2x - 5 - x = x + 3$
- $4 + x - 3 = 2x + 1 - x$

Apa yang bisa Anda simpulkan?

Example

Selesaikan SPL satu variabel berikut:

- $4x - 1 = x + 6$
- $2x - 5 - x = x + 3$
- $4 + x - 3 = 2x + 1 - x$

Apa yang bisa Anda simpulkan?

Teorema

Diberikan sistem persamaan linier (tunggal) $ax = b$.

- 1 *Jika $a \neq 0$, maka $x = \frac{b}{a}$ adalah solusi unik dari sistem.*
- 2 *Jika $a = 0$, tetapi $b \neq 0$, maka sistem tidak memiliki solusi.*
- 3 *Jika $a = 0$ dan $b = 0$, maka setiap skalar k adalah solusi dari $ax = b$.*

Example

Selesaikan SPL satu variabel berikut:

- $4x - 1 = x + 6$ (teorema 7 (1))
Dalam bentuk standar, SPL adalah: $3x = 7$.
Maka $x = \frac{7}{3}$ adalah solusi uniknya.
- $2x - 5 - x = x + 3$ (teorema 7 (2))
Dalam bentuk standar, SPL adalah: $0x = 8$.
Maka persamaan tidak memiliki solusi.
- $4 + x - 3 = 2x + 1 - x$ (teorema 7 (3))
Dalam bentuk standar, SPL adalah: $0x = 0$.
Maka setiap skalar k adalah solusi.

Sistem persamaan linier dalam **dua variabel**

Diberikan sistem dua persamaan linier non-degenerasi dalam dua variabel:

$$A_1x + B_1y = C_1$$

$$A_2x + B_2y = C_2$$

Example

Selesaikan sistem persamaan linier berikut:

$$\begin{cases} L_1 : x - y = -4 \\ L_2 : 3x + 2y = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} L_1 : x + 3y = 3 \\ L_2 : 2x + 6y = -8 \end{cases} \quad \begin{cases} L_1 : x + 2y = 4 \\ L_2 : 2x + 4y = 8 \end{cases}$$

Apa yang dapat Anda simpulkan?

Banyaknya solusi dari SPL berukuran (2×2)

- 1 SPL memiliki **sebuah solusi**.

$$L_1 : x - y = -4$$

$$L_2 : 3x + 2y = 12$$

- 2 SPL **tidak memiliki solusi**.

$$L_1 : x + 3y = 3$$

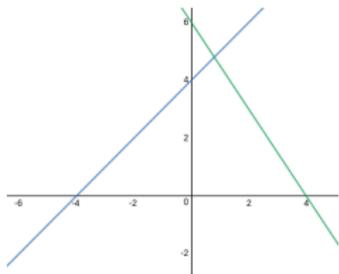
$$L_2 : 2x + 6y = -8$$

- 3 Sistem memiliki **tak hingga banyaknya solusi**.

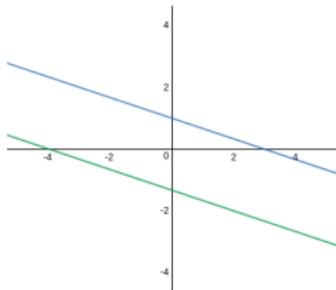
$$L_1 : x + 2y = 4$$

$$L_2 : 2x + 4y = 8$$

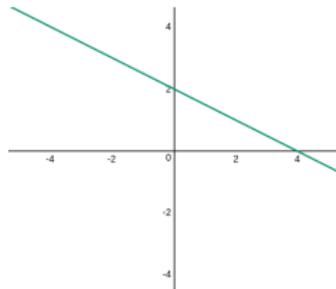
Interpretasi geometris



(a) Exactly one solution



(b) No solution



(c) Infinitely many solution

1. Sistem dengan satu solusi

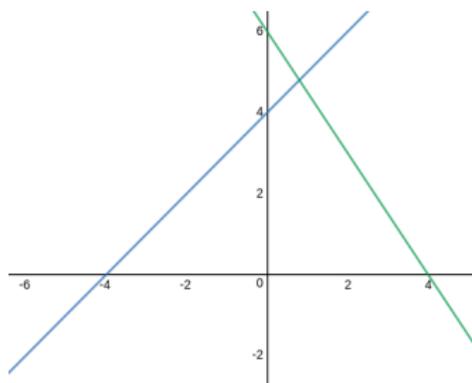
- Diberikan SPL:

$$A_1x + B_1y = C_1$$

$$A_2x + B_2y = C_2$$

- Kedua garis yang merepresentasikan SPL tersebut *berpotongan* di sebuah titik yang sama.

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \quad \text{or} \quad A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$$



2. SPL yang tidak memiliki solusi

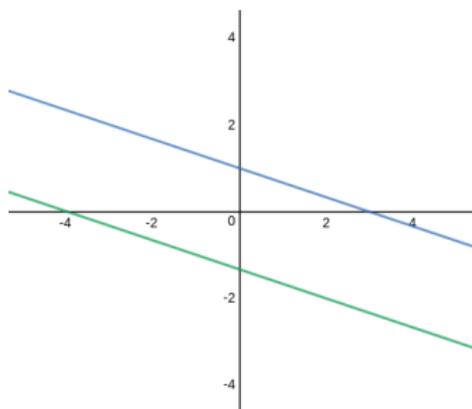
- Diberikan SPL:

$$A_1x + B_1y = C_1$$

$$A_2x + B_2y = C_2$$

- Kedua garis yang merepresentasikan SPL tersebut *sejajar*.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \quad \text{dimana} \quad A_1B_2 - A_2B_1 = 0$$



3. SPL dengan tak-hingga banyaknya solusi

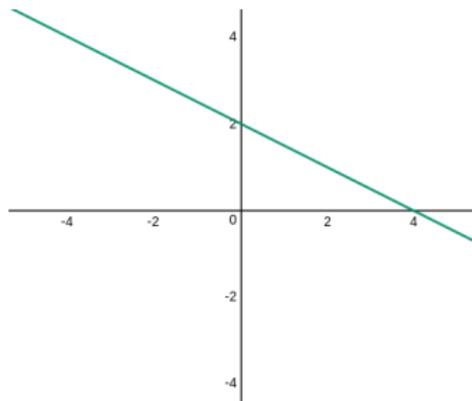
- Given:

$$A_1x + B_1y = C_1$$

$$A_2x + B_2y = C_2$$

- Kedua garis yang merepresentasikan SPL tersebut *berhimpit*.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad \text{dimana} \quad A_1B_2 - A_2B_1 = 0$$



- Sistem memiliki tepat satu solusi ketika $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$.
- Sistem memiliki tidak ada solusi dari banyak solusi ketika $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$.

Nilai $A_1B_2 - A_2B_1$ disebut **determinan orde dua**.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

Q: Dapatkah Anda menjelaskan keterkaitan solusi SPL dengan determinan?

- Sistem memiliki tepat satu solusi ketika $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$.
- Sistem memiliki tidak ada solusi dari banyak solusi ketika $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$.

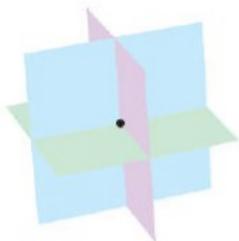
Nilai $A_1B_2 - A_2B_1$ disebut **determinan orde dua**.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

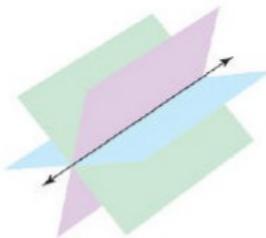
Q: Dapatkah Anda menjelaskan keterkaitan solusi SPL dengan determinan?

Remark: Suatu sistem memiliki *solusi tunggal jika determinan koefisiennya bukan nol*.

Banyaknya solusi dari SPL berukuran (3×3)



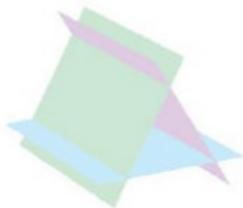
(a) One solution
(a point)



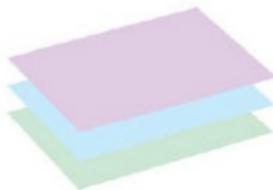
(b) Infinite number
of solutions (a line)



(c) Infinite number
of solutions (a plane)



(d) No solution



(e) No solution

Contoh 1: Solusi tunggal

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Gaussian elimination}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

SPL tersebut memiliki himpunan solusi:

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1$$

Contoh 2: Solusi tak terhingga banyaknya

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Gaussian elimination}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Dari baris terakhir, dapat diturunkan persamaan:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

yang dapat dipenuhi oleh banyak nilai x . Solusinya dapat ditulis dalam bentuk parametrik:

- Misal $x_3 = k$, dengan $k \in \mathbb{R}$.
- Kemudian $x_2 = 2 - k$ dan
 $x_1 = 4 - x_2 - 2x_3 = 4 - (2 - k) - 2k = 2 - k$.

Ini berarti terdapat tak terhingga banyaknya solusi, karena ada tak hingga banyaknya kemungkinan nilai k .

Contoh 3: SPL yang tidak memiliki solusi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Gaussian elimination}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Dari baris terakhir, dapat diturunkan persamaan:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \quad (1)$$

Sehingga, tidak ada kemungkinan nilai $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ yang dapat memenuhi persamaan (1).

Bagaimana dengan sistem dengan lebih dari 3 variabel?

Catatan:

- Untuk SPL dengan lebih dari 3 variabel, sulit untuk menafsirkannya secara geometris.
- Namun jumlah solusi yang mungkin dapat diketahui dengan melihat **bentuk dari matriks eselon tereduksi**.

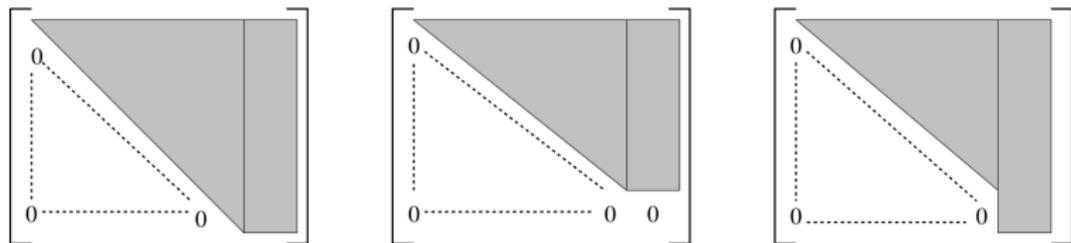


Figure: Left (unique solution), middle (many solutions), right (no solution) — *source: lecture notes of Rinaldi Munir, ITB*

bersambung...