TD 13 – Little of everything (corrigé)

Exercice 1. *Urn of Polya (Warm up)*

On considère une urne avec initialement une boule blanche et une boule noire. On répète alors l'opération suivante : tirer une boule, la remettre, ajouter une boule de la même couleur. On s'intéresse au nombre de boules blanches et noires après n tirages, et au comportement asymptotique.

1. Modéliser par une chaîne de Markov et faire un dessin.

☞ On considère une chaîne de Markov dans $\mathbb{N}^2$, l'état (i, j) représente l'état où il y a i boules blanches et j boules noires dans l'urne. Avec proba $\frac{i}{i+j}$, on passe a l'état $(i+1, j)$. Sinon, on passe a l'état (i, i).

2. Combien y a-t-il de chemins menant à la configuration « n boules dont k noires » ?

☞ On ajouté $n-2$ boules, parmi lesquelles $k-1$ noires. Il y a donc $\binom{n-2}{k-1}$ chemins.

3. Quelle est la probabilité de chaque chemin ?

☞ Si l'on fait le produit des probabilités rencontrée le long d'un chemin, on trouve au dénominateur tous les entiers de 2 à $n-1$. Le numérateur est aussi identique sur chaque chemin. La probabilité est

$$\frac{(k-1)!(n-2-(k-1))!}{(n-1)!}$$

$$\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{\binom{n-2}{k-1}}$$

4. Quelle est la probabilité d'arriver à la configuration «n boules dont k noires » ?

☞ La probabilité d'arriver à la configuration « n boules dont k noires » est donc $\frac{1}{n-1}$, pour $k \leq n-1$.

Exercice 2. *Urn of Polya (The revenge)*

1. Décrire un modèle équivalent avec deux urnes et seulement des boules blanches. On notera x et y le nombre de boules dans chacune des deux urnes.

☞ Chaque fois que l'on ajoute une boule, elle est dirigée vers l'urne 1 avec probabilité $\frac{x}{x+y}$.

2. On considère deux urnes et des boules blanches. Montrer que, quand on fixe le nombre total de boules ajoutées, le nombre de boules dans l'urne 1 a la même loi dans les deux modèles suivants:
   - Temps t continu, les deux urnes vides au départ évoluent indépendamment. Chaque urne reçoit une boule à $t = 0$. Chaque fois que l'urne 1 reçoit une boule, on attend un temps T_x puis on lui ajoute une boule. T_x est une variable aléatoire de loi exponentielle avec paramètre x^p (x est toujours le nombre de boules de l'urne 1). On fait de même pour l'urne 2 avec une v.a. U_y.
   - Temps discret. À chaque étape on ajoute une boule à l'une des deux urnes. La probabilité que ce soit l'urne 1 est $\frac{x^p}{x^p+y^p}$.

☞ La loi exponentielle est sans mémoire, on peut donc considérer que chaque fois que l'on ajoute une boule, on refait le tirage des v.a. T_x et U_y . La prochaine boule que l'on ajoute est donc dirigée vers l'urne 1 si et seulement si $T_x < U_y$, ce qui arrive avec probabilité $\frac{x^p}{x^p+y^p}$.

3. On se place désormais dans le cas $p > 1$. Soit $S_1 = \sum_{x=1}^{\infty} T_x$. Montrer que presque sûrement $S_1 < \infty$.

☞

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[S_1] &= \mathsf{E}[\sum_{x=1}^{\infty} T_x & (1)\\ &= \sum_{x=1}^{\infty} \mathsf{E}[T_x] & (2)\\ &= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^p} & (3)\\ &< \infty & (4) \end{aligned}$$

Donc $\Pr(S_1 = \infty) = 0$.

4. Donner une interprétation en français (ou anglais :)) de S_1.

☞ S_1 est le « temps de saturation », ou le temps au bout duquel l'urne 1 a reçu une infinité de boules.

5. On définit S_2 de façon analogue pour l'urne 2. Montrer que presque sûrement $S_1 \neq S_2$.

☞