TD 10 – Continuous Distribution

Exercice 1. *Density*

Suppose X has density function $f(x) = c(1 - x^2)$ for $-1 < x < 1$ and $f(x) = 0$ elsewhere.

1. Compute the value of c. Find the distribution function $F(x)$ of X. Sketch the graphs of $f(x)$ and $F(x)$. Compute the probabilities $P(X > 0.5)$ and $P(0 < X < 0.5)$.

2. Let Y be a Bernoulli variable and X and Y be independent. Find the distribution function and the expectation of $X + Y$.

Exercice 2. *Records*

Let $U_1, \ldots, U_n$ be n independent random variables uniformly distributed on $[0, 1]$. For $i \in \{1, \ldots, n\}$, we say that U_i is a *record* if $U_i \leq U_j$ for all $j \leq i$. Computed the expected number of records in the sequence $U_1, \ldots, U_n$.

Exercice 3. *Intervalle*

Soit S une union d'intervalles inclus dans le segment $[0, 1]$. On suppose que la longueur totale de S est strictement supérieure à $1/2$. Montrer qu'il existe deux points $x, y \in S$ tels que $|x - y| = 0.1$.

Exercice 4. *PrevoirCrise*

Le président des États-Unis se prépare à décréter l'embargo économique contre Cuba. Ses conseillers ont estimé que la durée de la crise suivrait une loi exponentielle de moyenne 4 ans.

1. On suppose exacte cette estimation. Sachant que le président fume deux cigares par jour et qu'il a en réserve 8 boîtes de 500 Havanes, quelle est la probabilité pour qu'il résiste à la crise ?

2. Cette probabilité n'a pas rassuré le président. Calculer le nombre minimal de boîtes supplémentaires qu'il doit faire acheter par sa secrétaire pour ne pas manquer de cigare avec une probabilité supérieure à 0,95.

Exercice 5. *Minimum Spanning Tree*

Let $X_1, \ldots, X_n$ independent uniform random variables in $[0, 1]$.

1. Assume $Y_1 = \min_i X_i$. What is $\mathbb{E}[Y_1]$?

Let Y_k be the k-th smallest value of $X_1, \ldots, X_n$.

2. Show that $\mathbb{E}[Y_k] = \dfrac{k}{n+1}$

Assume now we assign to each each edge of K_n a random weight uniformly independently sampled from $[0, 1]$.

3. Show that the expected size of a minimum weight spanning tree is at least $1 - \frac{1}{1+\binom{n}{2}}$