TD 08 – Markov Chains and Partiel

Exercice 1. *Marche aléatoire sur Z biaisée*

Soit $p \in]0,1[$, et considérons la chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbb{Z}$ et de matrice de transition

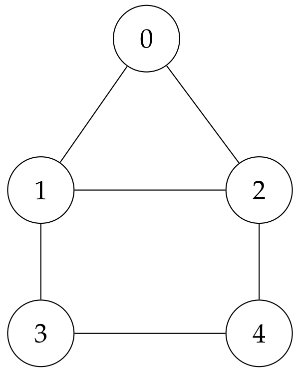
$$P(i,j) = \begin{cases} p \text{ si } j = i+1 \\ 1-p \text{ si } j = i-1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Cette chaîne est-elle irréductible ?

2. Dans cette question on suppose $p \neq 1/2$, montrer que tous les états de cette chaîne sont transients. *Indication : on pourra utiliser le lemme de Borel-Cantelli. On rappelle également l'équivalent de Stirling :* $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$.

Exercice 2. *Marche aléatoire dans un graphe*

On considère une marche aléatoire sur le graphe suivant (c'est à dire qu'à chaque étape, on choisi le sommet suivant uniformément au hasard parmi les voisin du sommet courant).



1. On suppose que la distribution initiale est $\pi_0 = (1,0,0,0,0)$ (i.e. $X_0 = 0$ avec probabilité 1). Le vecteur de distribution π_n converge-t-il lorsque n tend vers l'infini ? Si oui, déterminer sa limite.

2. Même question si la distribution initiale est $\pi_0 = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Exercice 3. *Fumeur*

Rappel: Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dire *arithmetico-géométrique* s'il existe a et b tels que la suite vérifie la relation suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b\ .$$

Si $a = 1$, la suite est en fait simplement une suite arithmétique. Si $a \neq 1$, on obtient le n-ième terme de la suite par la formule suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n(u_0 - r) + r \qquad \text{où } r = \frac{b}{1-a}\ .$$

De plus,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = (u_0 - r)\frac{a - a^n}{1 - a} + nr \ .$$

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. Le premier jour suivant cette bonne résolution (jour 0), il ne fume pas. On suppose que la probabilité qu'il fume le jour $j+1$ s'il n'a pas fumé le jour j est α, et que la probabilité qu'il ne fume pas le jour $j+1$ s'il a fumé le jour j est β, avec α et β non nuls et indépendants de j.

1. Justifier que l'on peut modéliser ce problème par une chaîne de Markov, et en donner sa représentation graphique.

2. Calculer la probabilité p_n qu'il ne fume pas le jour n. Quelle est la limite π de $(p_n, 1 - p_n)$ quand $n \to +\infty$? Vérifier que π est une probabilité invariante pour la chaîne, c'est-à-dire que si X_n suit la loi π, alors X_{n+1} aussi.

3. Trouver $s > 0$ et $0 < t < 1$ tels que , pour tout état x on a: $|\mathbf{P}\{X_n = x\} - \pi(x)| \leq st^n$.

4. Quelle est la loi du premier jour où il se remet à fumer?

5. Quelle est la loi du premier jour (autre que le jour 0) où il ne fume pas?

6. Calculer l'espérance du nombre de jours N_n où il fume entre le jour 1 et le jour n. Déterminer la limite $\mathbf{E}[N_n]/n$.

Exercice 4. *Siege Avion (midterm)*

1. Les n passagers d'un avion à n sièges ont tous reçu leur numéro de siège. Ils rentrent dans l'avion un par un. Hélas, le premier passager s'installe dans un siège qui n'est pas le sien. Chaque passager suivant s'installe dans son siège s'il est libre, et sinon dans un siège actuellement vide choisi au hasard. Quelle est la probabilité que le dernier passager se retrouve assis à son siège?

Exercice 5. *Distance Couplage (midterm)*

Soit Ω un ensemble fini. On considère deux distributions de probabilité μ et ν sur Ω dont les évènements sont toutes les parties Ω. On définit leur distance de variation totale $d_{VT}(\mu, \nu)$ comme la différence maximale entre les probabilités assignées à un évènement par les deux distributions ; formellement,

$$d_{VT}(\mu, \nu) = max_{A \subset \Omega} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

1. Montrer que $d_{VT}(\mu, \nu) = \dfrac{1}{2} \sum_{x \in \Omega} |\mu(x) - \nu(x)|$

2. Montrer que
$$d_{VT}(\mu, \nu) = \sum_{x \in \Omega, \mu(x) \geq \nu(x)} \mu(x) - \nu(x)$$

3. Montrer que $d_{VT}(\mu, \nu)$ est bien une distance (i.e., vérifie l'inégalité triangulaire).

4. Montrer que
$$d_{VT}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sup_{f:\Omega \to R, max_{x \in \Omega}|f(x)| \leq 1} \left(\sum_{x \in \Omega} f(x)\mu(x) - \sum_{x \in \Omega} f(x)\nu(x) \right)$$

Un couplage des distributions μ et ν est une paire (X, Y) de variables aléatoires "réalisant" ces distributions : $\forall x \in \Omega, \Pr(X = x) = \mu(x)$ et $\forall y \in \Omega, \Pr(Y = y) = \nu(y)$. On veut montrer que

$$d_{VT}(\mu, \nu) = \inf_{(X,Y)\text{: couplage de } \mu \text{ et } \nu} \Pr(X \neq Y)$$

5. Montrer que $d_{VT}(\mu, \nu) \leq \Pr(X \neq Y)$ pour tout couplage μ et ν

Pour l'égalité, on va choisir X et Y qui la réalisent ;
Poser $p = \sum_{x \in \Omega} min(\mu(x), \nu(x))$

6. Monter que $p = 1 - d_{VT}(\mu, \nu)$

Tirer une pièce qui tombe sur face avec probabilité p.

- Si on obtient face, choisir une valeur Z selon la distribution

$$\gamma_3(x) = \frac{min(\mu(x), \nu(x))}{p}$$

  et poser $X = Y = Z$
- Sinon choisir X selon la distribution

$$\gamma_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\mu(x) - \nu(x)}{d_{VT}(\mu, \nu)} & \text{si } \mu(x) > \nu(x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  et choisir indépendamment Y selon la distribution

$$\gamma_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\nu(x) - \mu(x)}{d_{VT}(\mu, \nu)} & \text{si } \nu(x) > \mu(x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

7. Montrer que $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont des distributions et vérifient

$$\mu = (1 - p)\gamma_1 + p\gamma_3, \nu = (1 - p)\gamma_2 + p\gamma_3$$

8. Conclure : la distribution de X est μ, celle de Y est ν, et $d_{VT}(\mu, \nu) = \Pr(X \neq Y)$