TD 06 – Markov Chains

Exercice 1. *Basique Terminology*

On dispose de trois chaînes de Markov définies par les matrices de transition suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Pour chacune d'entre elles:

- Donner sa représentation graphique.
- Partitionner les états en composantes irréductibles.
- Pour chaque état, dire s'il est transitoire ou récurrent.
- Pour chaque état, dire s'il est périodique ou apériodique.
- Donner la distribution stationnaire.
- Pour chaque état, donner le temps de retour moyen.

Exercice 2. *Jeu Tennis*

1. On considère un jeu classique du tennis (pas un jeu décisif) de Daniel contre Olivier. Olivier gagne chaque point avec probabilité p. Modéliser par une chaîne de Markov et donner la probabilité pour Olivier de gagner le jeu.
2. Lorsque $p \approx 0$, donner l'équivalent asymptotique de cette probabilité. Commenter.

Exercice 3. *Char*

Trois chars livrent un combat. Le char A atteint sa cible avec probabilité 2/3, le char B avec la probabilité 1/2 et le char C avec la probabilité 1/3. Ils tirent tous ensemble, et dès qu'un char est touché, il est détruit. On considère à chaque instant l'ensemble des chars non détruits. Construire la chaîne de Markov correspondantes sous forme graphique pour chacun des cas suivants:

1. Chaque char tire sur son adversaire le plus dangeureux.
2. A tire sur B; B tire sur C; et C tire sur A.

Exercice 4. *Truck*

Three out of every four trucks on the road are followed by a car, while only one out of every five cars is followed by a truck.

1. If I see a truck pass me by on the road, on average how many vehicles pass before I see another truck?

Exercice 5. *Diffusion*

We study a simple model for the exchange of gas molecules between two containers. The total number of molecules in the two containers is N, and we study the evolution of the number of molecules in the first container. At every discrete time step t, the exchange is modeled as follows: if the first container has x molecules, then it increases to $x+1$ with probability $\frac{N-x}{N}$ and decreases to $x-1$ with probability $\frac{x}{N}$.

1. Describe this model with a Markov chain (give the state space and transition matrix). For $N = 3$, draw a graphical representation of this Markov chain.

2. Find the stationary distribution of this Markov chain.

3. Suppose at time 0, the first container is empty (i.e., all the N molecules are in the second container). Let $T \geq 1$ be the next time where the first container is empty. Compute $\mathbf{E}[T]$.