TD 06 – The Probabilistic Method

Exercice 1. *LargeCut*

Given an undirected graph G with n vertices and m edges. Prove that there is a partition of V into two disjoint sets A and B such that at least $m/2$ edges connect a vertex in A to a vertex in B.

Exercice 2. *Test*

Deux cent étudiants participent à un concours de maths. Le concours comporte 6 questions. Pour chaque question, au moins 120 étudiants ont réussi à répondre correctement à la question. Montrer qu'il existe deux étudiants qui avaient tout bon à eux deux (i.e. tels que pour chaque question, au moins un des étudiants a bien répondu).

Exercice 3. *Lemme local de Lovasz*

Soit $k > 6$. On se donne une famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles d'un ensemble fini F telle que

1. Pour tout $i \in I$, $\mathrm{card}(A_i) = k$,
2. Pour tout $x \in F$, $\mathrm{card}\{i \in I : x \in A_i\} \leq \frac{2^k}{8k}$

En utilisant le lemme local de Lovász, montrer qu'il existe une partition $F = F_1 \cup F_2$ telle que

$$\forall i \in I, \quad A_i \cap F_1 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad A_i \cap F_2 \neq \emptyset.$$

Exercice 4. *Permutation*

On dit qu'une permutation $\{x_1, \ldots, x_{2n}\}$ de l'ensemble $\{1, \ldots, 2n\}$ vérifie la propriété P si pour un moins un indice $i \in \{1, \ldots, 2n-1\}$, on a $|x_i - x_{i+1}| = n$. Montrer que pour tout n, il existe strictement plus de permutation avec la propriété P que sans. *Indice : on pourra utiliser la formule de Poincaré (sans partir pour autant dans des calculs trop compliqués).*

Exercice 5. *Tournaments*

A Tournament on a set V of n players is an orientation of the edges of the complete graph K_n (i.e., for $x, y \in V$ either $(x, y) \in E$ or $(y, x) \in E$). Prove that for every positive integer n, there exists a tournament on n vertices with at least $n!2^{-(n-1)}$ Hamiltonian paths (an Hamiltonian path is a path going through each vertex exactly once).

Exercice 6. *Arithmetic Series Coloring*

Show that we can color the elements of the set $S = \{1, 2, \ldots, 1987\}$ with 4 colors so that any arithmetic progression with 10 terms in the set is not monochromatic.