# TD 03 – Moments d'une variable aléatoire

**Exercice 1.** *Le problème des rencontres*

On se donne une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On va alors procéder à une succession de tirages sans remise jusqu'à vider l'urne.
On s'intéresse aux évènements $E_i =$ « la $i$ème boule tirée porte le numéro $i$».

1. Proposer un espace de probabilité pour modéliser cette expérience.

2. Calculer la probabilité des évènements suivants : $E_i$, $E_i \cap E_j$ pour $i < j$, et enfin $\bigcap_{j=1}^{r} E_{i_j}$ pour $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n$.

3. Calculer la probabilité que l'évènement $E_i$ se produise pour au moins un $i$. Quelle est la limite de cette probabilité lorsque $n$ tend vers l'infini.

4. Combien y a-t-il de façons de placer huit tours sur un échiquier de telle sorte qu'aucune d'entre elles en attaque une autre ? Qu'en est-il si on impose en plus que la diagonale principale soit vide ?

**Exercice 2.** *Markov is Tight*

Montrons que l'inégalité de Markov est "tight", c'est-à-dire que l'on ne peut pas espérer avoir une meilleure borne sans autre hypothèse sur la variable aléatoire $X$:

1. Soit $k$ un entier strictement positif. Définissez une variable aléatoire $X$, qui ne prend que des valeurs positives ou nulles, dont l'espérance est strictement positive et pour laquelle:

$$\mathbf{P}\{X \ge k\mathbf{E}[X]\} = \frac{1}{k} .$$

**Exercice 3.** *Running Time*

Soit $\mathcal{A}$ un algorithme déterministe qui prend en entrée une chaîne de $n$ bits et dont l'espérance du temps d'exécution est $\mathcal{O}(n^2)$ si l'entrée est choisie aléatoirement de manière uniforme.

1. Soit $f(n)$ une fonction tendant vers $+\infty$ avec $n$. Montrer que la probabilité que le temps d'exécution soit supérieur à $n^2 f(n)$ tend vers zero quand $n$ tend vers l'infini.

2. Que pouvons nous en déduire sur le temps d'exécution dans le pire cas?

**Exercice 4.** *Debiaiser des bits*

Supposons que vous ayez une machine qui produit des bits aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p$, mais que vous ne connaissez pas la valeur de $p \in ]0,1[$.

1. Proposez un algorithme qui utilise la machine pour produire un bit de loi uniforme sur $\{0,1\}$.

2. On souhaite maintenant produire $n$ bits indépendants de loi uniforme sur $\{0,1\}$. Proposez un algorithme, et déterminez une valeur de $t$ telle que la probabilité d'utiliser la machine plus de $tn$ fois soit inférieure à $\frac{1}{100}$ pour $n$ assez grand. Évidemment, plus $t$ est petit, mieux c'est.

**Exercice 5.** *Chebychev d'ordre supérieur*

L'inégalité de Chebyshev utilise la variance d'une variable aléatoire pour borner son écart par rapport à l'espérance. On peut également utiliser des moments d'ordre supérieur.

1. Supposons que l'on ait une variable aléatoire $X$ et un entier pair $k$ pour lequel $\mathbf{E}\left[(X-\mathbf{E}[X])^k\right]$ est finie. Prouver que:

$$\mathbf{P}\left\{|X-\mathbf{E}[X]| > t\sqrt[k]{\mathbf{E}\left[(X-\mathbf{E}[X])^k\right]}\right\} \leq \frac{1}{t^k}\,.$$

2. Qu'est-ce qui nous empêche d'obtenir une inégalité similaire pour le cas où $k$ est impair? Trouver un contre exemple pour $k=1$.

**Exercice 6.** *Coquilles dans un TD*

1. Une feuille de TD contient 4 coquilles. À chaque relecture, une coquille non corrigée est corrigée avec probabilité $1/3$. Les relectures sont indépendantes les unes des autres. Combien de relectures faut-il faire au minimum pour que la probabilité qu'il ne subsiste aucune coquille soit supérieure à 0,9?

2. À quel autre problème vu en cours vous fait penser la situation précédente ?

3. Soit $X$ une variable aléatoire d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type $\sigma = 5$. Montrer que pour tout $n \geq 50$, la probabilité que de l'événement $\{10-n < X < 10+n\}$ est au moins égale à 0,99.

**Exercice 7.** *Weak Law of Large Numbers*

The weak law of large numbers states that if $X_1, X_2, X_3, \ldots$ are independent and identically distributed random variables with mean $\mu$ and standard deviation $\sigma$, then for any constant $\epsilon > 0$, we have

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right\} = 0$$

1. Use Chebyshev to prove weak law of large numbers